Evolutionsgleichungen

Musterlösung zu Blatt 8

---

1. (a) Sei $0 \neq x \in D(A)$ Eigenvektor zum Eigenwert λ. Betrachte die Funktion $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto e^{-t\lambda}T(t)x \in X$. Dann ist
$$\frac{d}{dt}\left(e^{-t\lambda}T(t)x\right) = -\lambda e^{-t\lambda}T(t)x + e^{-t\lambda}T(t)Ax = 0,$$
also $e^{-t\lambda}T(t)x = e^0T(0)x = x$ oder $T(t)x = e^{t\lambda}x$, d.h. $e^{t\lambda}$ ist Eigenwert von $T(t)$ mit Eigenvektor x.

   (b) Aus a) folgt, dass unter den genannten Voraussetzungen für jeden Eigenvektor x und damit auch für jedes Element des Aufspanns der Eigenvektoren gilt
$$T(t+\alpha)x = T(t)T(\alpha)x = T(t)e^{\frac{2\pi in}{\alpha}\alpha}x = T(t)x.$$
Da der Aufspann der Eigenvektoren dicht in X liegt, ist die Behauptung gezeigt.

2. (a) $0 = \langle f, g\rangle_{H_1} + \langle Tf, h\rangle_{H_2} = \langle f, g\rangle_{H_1} + \langle f, T^*h\rangle_{H_1} \quad \Leftrightarrow \quad g = -T^*h.$

   (b) Sei $(Id + TT^*)x = 0$. Dann ist $\langle (Id+TT^*)x, x\rangle_{H_2} = \langle x, x\rangle_{H_2} + \langle T^*x, T^*x\rangle_{H_1}$, d.h. $x = 0$ und $(Id + TT^*)$ ist injektiv.
Sei $y \perp x$ für alle $x \in \mathrm{Rg}(Id + TT^*)$, also insbesondere $0 = \langle y, (Id + TT^*)y\rangle_{H_2} = \langle y, y\rangle_{H_2} + \langle T^*y, T^*y\rangle_{H_1}$. Es folgt $y = 0$, was bedeutet, dass $(Id+TT^*)$ bijektiv ist und damit des Satzes vom offenen Bild wegen auch invertierbar. Ebenso für $(Id + T^*T)$.

   (c) Bezeichne mit $G(T)$ den Graphen von T. Es ist
$$B\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Id + T^*T)^{-1}f + T^*(Id + TT^*)^{-1}g \\ T(Id + T^*T)^{-1}f - (Id + TT^*)^{-1}g + g \end{pmatrix} \in G(T),$$
weil $T((Id+T^*T)^{-1}f + T^*(Id+TT^*)^{-1}g) = T(Id+T^*T)^{-1}f + (Id - IdTT^*)(Id+TT^*)^{-1}g = T(Id + T^*T)^{-1}f - (Id + TT^*)^{-1}g + g$, und B ist ein linearer Operator.
Ferner gilt $T(Id + T^*T)^{-1} = (Id + TT^*)^{-1}(Id + TT^*)T(Id + T^*T)^{-1} = (Id + TT^*)^{-1}T$ und ebenso $T^*(Id + TT^*)^{-1} = (Id + T^*T)^{-1}T^*$. Es folgt
$$B\begin{pmatrix} f \\ Tf \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Id + T^*T)^{-1}f + T^*T(Id + TT^*)^{-1}f \\ T(Id + T^*T)^{-1}f - T(Id + TT^*)^{-1}f + Tf \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ Tf \end{pmatrix}$$
und
$$B\begin{pmatrix} -T^*g \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
und damit die Behauptung.

3. Wenn $T(t)$ und S für alle $t \geq 0$ kommutieren, gilt für alle $(x, Sx) \in G(S)$, dass $(T(t)x, T(t)Sx) = (T(t)x, ST(t)x) \in G(S)$. Umgekehrt folgt aus $(T(t)x, T(t)Sx) \in G(S)$, dass $T(t)Sx = ST(t)x$ und $T(t)$ und S kommutieren.