1. Sei $M : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ stetig und konvex mit $M(t) = 0$ genau dann, wenn $t = 0$. Definiere $\mathcal{L}_M(\mathbb{R})$ als die Menge aller messbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, für die ein $c > 0$ existiert mit
$$\int_{\mathbb{R}} M(|f(t)|/c)\, dt < \infty.$$
Zeige, dass $\mathcal{L}_M(\mathbb{R})$ ein Vektorraum ist. Betrachte jetzt den *Orliczraum* genannten Quotientenvektorraum
$$L_M(\mathbb{R}) := \mathcal{L}_M(\mathbb{R})/\{f : f = 0 \quad \text{fast überall}\}$$
und definiere für $f \in L_M(\mathbb{R})$
$$\|f\|_M := \inf\{c > 0 : \int_{\mathbb{R}} M(|f(t)|/c)\, dt \leq 1\}.$$
Zeige, dass dadurch eine Norm auf $L_M(\mathbb{R})$ definiert wird (warum gilt $\|f\|_M < \infty$) und dass $(L_M(\mathbb{R}), \|\cdot\|_M)$ ein Banachraum ist.
Betrachte nun
$$H_M(\mathbb{R}) := \{f \in L_M(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} M(|f(t)|/c)\, dt < \infty \quad \forall c > 0\}.$$
Zeige, dass $H_M(\mathbb{R})$ ein abgeschlossener Unterraum von $L_M(\mathbb{R})$ ist, und überlege, ob $H_M(\mathbb{R}) = L_M(\mathbb{R})$ gilt, wenn $M(t) = t^p$, $1 \leq p < \infty$, bzw. $M(t) = \exp(t^2) - 1$ gewählt wird.

2. Sei (Ω, μ) Maßraum und $f_n : \Omega \mapsto \mathbb{K}$ eine Folge messbarer Funktionen, $f : \Omega \mapsto \mathbb{K}$ ebenfalls messbar.
Zeige durch Beispiele, dass aus $f_n \to f$ fast überall im allgemeinen nicht $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$, $1 \leq p < \infty$, und dass umgekehrt aus $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$, $1 \leq p < \infty$, nicht $f_n \to f$ fast überall folgt. (Vgl. aber Korrollar zum Satz von Riesz-Fischer)

3. Sei (Ω, μ) Maßraum und $f : \Omega \mapsto \mathbb{K}$ messbare Funktion mit $\|f\|_q < \infty$ für ein $1 \leq q < \infty$.
Zeige, dass dann $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$ (wobei $\|f\|_p = \infty$ und $\|f\|_\infty = \infty$ zugelassen ist).
(Vgl. auch Blatt 2, Aufgabe 1a für l^p-Räume)

4. Sei (Ω, μ) Maßraum, sei $1 \leq p_0 \leq p_1 \leq \infty$ und $0 \leq \theta \leq 1$. Zeige, dass aus $f \in L^{p_0}(\mu) \cap L^{p_1}(\mu)$ folgt $f \in L^p(\mu)$ für alle $p_0 \leq p \leq p_1$ und genauer, dass gilt
$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^{\theta} \qquad \forall f \in L^{p_0}(\mu) \cap L^{p_1}(\mu), \text{ wobei } \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$