Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
R. Pröpper
WiSe 2011/2012

Blatt 14 zu **Funktionalanalysis** bis 13.02.

1. Sei (Ω, μ) Maßraum und $\mu(\Omega) < \infty$.

   Zeige, dass für alle $f \in L^p(\Omega)$ und alle $q \in [p, \infty]$ genau ein $g \in B_1^{(q)}(0) := \{h \in L^q(\Omega) : \|h\|_q \leq 1\}$ existiert, so dass $\|f - g\|_p \leq \|f - h\|_p$ für alle $h \in B_1^{(q)}(0)$.

2. Seien X, Y Banach-Räume und $S : X \supset D(S) \mapsto Y$ ein linearer Operator.

   Zeige, dass S genau dann abschließbar ist, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D(S)$ mit $x_n \to 0$ und $Sx_n \to z \in Y$ bereits $z = 0$ folgt.

   (Hinweis: Für den Graph des Abschlusses $\overline{S}$ gilt $G(\overline{S}) = \overline{G(S)}$.)

3. Seien X, Y, Z Banach-Räume und sei $T : X \supset D(T) \to Y$ ein abgeschlossener Operator. Zeige:

   - $T + B$ ist abgeschlossen $\forall B \in \mathcal{L}(X, Y)$.
   - Ist $\lambda - T$ injektiv für ein $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist T genau dann abgeschlossen, wenn $(\lambda - T)^{-1}$ abgeschlossen ist.
   - TB mit $D(TB) := \{z \in Z : Bz \in D(T)\}$ ist abgeschlossen $\forall B \in \mathcal{L}(Z, X)$.
   - $\ker T$ ist abgeschlossen.

4. Sei H ein Hilbertraum und $T : H \mapsto H$ ein linearer, symmetrischer, auf ganz H definierter Operator, d.h. $(Tx, y) = (x, Ty)$ für alle $x, y \in H$.

   Zeige, dass T dann bereits stetig ist.