Blatt 4 zu **Funktionalanalysis** bis 21.11.

1. a) Sei X ein normierter Raum und $C, D \subset X$ konvex.

   Zeige, dass dann auch der Abschluss, $\overline{C}$, und die Menge der inneren Punkte, int C, von C konvex sind. Zeige weiter, dass $\overline{C} = \overline{\text{int } C}$, falls int $C \neq \emptyset$.

   Folgere, dass sich C und D durch eine Hyperebene trennen lassen, d.h. es existiert ein nichttriviales Funktional $f \in X'$ mit $f(x) \leq f(y)$ für alle $x \in C$ und $y \in D$, falls $C \cap D = \emptyset$ und int $C \neq \emptyset$.

   b) Der Hilbertkubus $H \subset l^2$ ist definiert durch $H = \{x = (x_n)_{n \geq \mathbb{N}} \in l^2 : |x_n| \leq 1/2^n,\, n \in \mathbb{N}\}$. Zeige, H ist konvex und abgeschlossen und enthält keinen inneren Punkt.

2. Ein normierter Raum X heißt strikt konvex, falls für alle $x, y \in X$ mit $\|x\|, \|y\| = 1$ und $x \neq y$ gilt, dass $\|(x+y)/2\| < 1$.

   Man mache sich klar, dass jeder Hilbertraum und die l^p-Räume, $1 < p < \infty$, strikt konvex sind, l^1 und l^∞ hingegen nicht (jeweils mit der üblichen Norm).

   Man zeige: Wenn der Dualraum X' von X strikt konvex ist, dann existiert zu jedem normierten Unterraum U von X und jedem Funktional $g \in U'$ auf U **genau** ein Funktional $f \in X'$, das g auf X normgleich fortsetzt, d.h. $\|f\| = \|g\|$ und $f(x) = g(x)$ für $x \in U$.

3. Sei E ein endlich-dimensionaler, normierter Raum; $C \subset E$ konvex und $0 \notin C$. Wir zeigen C und 0 lassen sich (ohne weitere Voraussetzungen an C!) durch eine Hyperebene trennen.

   - Zeige, es existiert eine abzählbare Teilmenge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von C, die dicht in C liegt.
   - Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $C_n = \text{co}\{x_1, \ldots, x_n\}$ die konvexe Hülle von $x_1, \ldots, x_n$, d.h. $C_n = \{y = \sum_{i=1}^n t_i x_i |\, t_i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=1}^n t_i = 1\}$. Überprüfe, dass C_n kompakt ist und dass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ dicht in C liegt.
   - Zeige, dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $f_n \in E'$ existiert mit $\|f_n\| = 1$ und $f_n(x) \geq 0$ für alle $x \in C_n$.
   - Folgere daraus, dass ein $f \in E'$ existiert mit $\|f\| = 1$ und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in C$.
   - Seien jetzt $A, B \subset E$ nicht-leere, disjunkte und konvexe Mengen. Beweise die Existenz einer Hyperebene, die A und B trennt.

4. Betrachte die folgenden zwei Mengen in $E = l^p$, $1 \leq p < \infty$, oder $E = c_0$:

$$X = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} |\, x_{2n} = 0,\, n \in \mathbb{N}\}, \qquad Y = \{y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} |\, y_{2n} = \frac{1}{2^n} y_{2n-1},\, n \in \mathbb{N}\}.$$

   Man zeige, dass X und Y abgeschlossene Unterräume von E sind, dass $\overline{X+Y} = E$ und dass für $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, definiert durch $c_{2n-1} = 0$ und $c_{2n} = 1/2^n$ $(n \geq 1)$, gilt $c \notin X + Y$.
   Setze $Z = X - c = \{z = x - c |\, x \in X\}$ und zeige, dass $Y \cap Z = \emptyset$. Existiert eine Hyperebene, die Y und Z trennt?