Jun.-Prof. Dr. D. Mugnolo
R. Pröpper
WiSe 2011/2012

Blatt 5 zu **Funktionalanalysis** bis 28.11.

1. Zeige, dass $(c_0)'$ isometrisch isomorph zu l^1 ist, und folgere, dass c_0 nicht reflexiv ist.

2. Sei X ein Banachraum und $M \subset X$, $N \subset X'$.

   - Zeige, dass aus M absolutkonvex M sternförmig bezüglich 0 folgt, aber nicht umgekehrt.
   - Zeige, M° und ${}^\circ N$ sind stets abgeschlossen und absolutkonvex.
   - Zeige, dass M genau dann absolutkonvex ist, wenn für alle $x, y \in M$ gilt, dass aus $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ folgt, dass $\lambda x + \mu y \in M$.

3. Sei X ein Banachraum, $\phi_k \in X'$ und $c_k \in \mathbb{K}$, $k = 1, \ldots n$. Ferner existiere ein $C > 0$, so dass für alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ gilt $|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k| \leq C \| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k \|$.
   Zeige, dass zu jedem $\epsilon > 0$ ein $x_\epsilon \in X$ existiert mit $\phi_k(x_\epsilon) = c_k$, $k = 1, \ldots, n$, und $\|x_\epsilon\| \leq C + \epsilon$.

4. Sei X ein normierter Raum. Dann lässt sich zu jeder Teilmenge $M \subset X'$ ein Konvergenzbegriff, $\sigma(X, M)$-Konvergenz, (bzw. eine Topologie) auf X definieren, indem man sagt, die Folge (x_n) aus X konvergiere gegen $x \in X$, wenn $\lim_{n \to \infty} \phi(x_n - x) = 0$ für alle $\phi \in M$.
   Gib eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass der Grenzwert bezüglich $\sigma(X, M)$-Konvergenz eindeutig ist. Ist der Grenzwert bezüglich $\sigma(X', X)$-Konvergenz eindeutig?