Blatt 8 zu **Funktionalanalysis** bis 19.12.

1. Seien X, Y normierte Räume und $T \in K(X,Y)$ ein kompakter Operator.
   Zeige, dass das Bild $\operatorname{rg} T = T(X) \subset Y$ von T separabel ist.

2. Sei X ein normierter Raum und $V \subset X$ abgeschlossen und konvex. Sei (x_n) eine schwach konvergente Folge in V mit schwachem Grenzwert x.

   Zeige $x \in V$. (Hinweis: Satz von Hahn-Banach).

   Folgere, dass eine Folge von Konvexkombinationen $y_n = \sum_{i=1}^{N_n} \lambda_i^n x_i$ ($\lambda_i^n \geq 0$, $\sum_{i=1}^{N_n} \lambda_i^n = 1$) existiert mit $\lim_{n\to\infty} \|y_n - x\|_X = 0$.

3. Zeige, dass jeder lineare und stetige Operator von c_0 nach l^p, $1 \leq p < \infty$, kompakt ist.

4. Sei X ein separabler Banachraum und $X = \overline{\operatorname{span}\{x_m \in X : \|x_m\| = 1,\, m \in \mathbb{N}\}}$. Zeige, dass durch $d(\phi, \psi) := \sum_{m\in\mathbb{N}} 2^{-m} |\langle \phi - \psi, x_m \rangle|$ eine Metrik auf X' definiert wird und dass eine in X' beschränkte Folge (ϕ_n) genau dann bezüglich der Metrik $d(\cdot,\cdot)$ konvergiert, wenn sie schwach* (d.h. bezüglich der $\sigma(X', X)$-Topologie) konvergiert.

   Sei X jetzt zudem reflexiv. Folgere, dass man eine Metrik auf X definieren kann, so dass für in X beschränkte Folgen Konvergenz bezüglich dieser Metrik äquivalent zur schwachen Konvergenz (d.h. bezüglich der $\sigma(X, X')$-Topologie) ist.