Funktionalanalysis

Lösung zu Blatt 10

---

1. Aus Aufgabe 4 b) von Blatt 2 folgt $\sigma(T_K) = 0$ und aus dem Satz von Arzela-Ascoli die Kompaktheit von T_K.

2. $\int_\Omega |f(x)g(x)|^r \leq (\int_\Omega (|f|^r)^{p/r})^{r/p}(\int_\Omega (|g|^r)^{q/r})^{r/q}$ (aufgrund der Hölder-Ungleichung, da $r/p + r/q = 1$), also $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ mit Gleichheit genau dann, wenn $|f|^p/|g|^q = |f|^p/|g|^{\frac{p}{p-1}} =$ const. oder $|f|^{p-1} =$ const. $|g|$ f.ü..

3. Sei $\lambda \in \sigma(P(T))$ bzw. $\lambda \in \sigma_p(P(T))$. Faktorisiere $\lambda - P(T) = c(\lambda_1 - T) \cdot (\lambda_n - T)$. Da $\lambda - P(T)$ nicht invertierbar bzw. nicht injektiv ist, gilt dies auch für mindestens ein $\lambda_i - T$, also $\lambda_i \in \sigma(T)$ bzw. $\lambda_i \in \sigma_p(T)$, woraus wegen $\lambda - P(\lambda_i) = 0$ die Inklusion $\sigma(P(T)) \subseteq P(\sigma(T))$ bzw. $\sigma_p(P(T)) \subseteq P(\sigma_p(T))$ folgt.
   Sei jetzt $\lambda \in \sigma(T)$ bzw. $\lambda \in \sigma_p(T)$. Wegen $P(\lambda) - P(T) = c(\lambda - T)Q(T) = cQ(T)(\lambda - T)$ mit $Q(\cdot)$ Polynom ist $P(\lambda) - P(T)$ nicht invertierbar bzw. nicht injektiv; es folgt $P(\sigma(T)) = \sigma(P(T))$ bzw. $P(\sigma_p(T)) = \sigma_p(P(T))$.