Funktionalanalysis

Lösung zu Blatt 11

1. i) $\int_{\mathbb{R}} M(|f(t)|/c)dt = \int_{\mathbb{R}} M(|\alpha f(t)|/(|\alpha|c))dt$, d.h. $f \in \mathcal{L}_M \Rightarrow \alpha f \in \mathcal{L}_M$.

   ii) $\int_{\mathbb{R}} M\left(\frac{|f+g|(t)}{c+d}\right) dt = \int_{\mathbb{R}} M\left(\frac{c|f(t)|}{(c+d)c} + \frac{d|g(t)|}{(c+d)d}\right) dt \leq \frac{c}{c+d}\int_{\mathbb{R}} M\left(\frac{|f(t)|}{c}\right) dt$
   $+\frac{d}{c+d}\int_{\mathbb{R}} M\left(\frac{|g(t)|}{d}\right) dt < \infty$, falls $f, g \in \mathcal{L}_M$ und $c, d > 0$ entsprechend gewählt sind.

   Also ist $\mathcal{L}_M$ ein Vektorraum.

   Homogenität und Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_M$ folgen unmittelbar aus i) und ii).

   Aus $[f] \in L_m$ und $[f] = 0$ folgt $\int_{\mathbb{R}} M(|f(t)|/c)dt = 0$ für alle $c > 0$ (wegen $M(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ und $f = 0$ f-ü.), also $\|[f]\|_M = 0$.

   Aus $f \neq 0$ (wir schreiben ab jetzt f sowohl für die Funktion selbst als auch für deren Äquivalenzklasse) folgt, dass ein $\epsilon > 0$ und eine Menge X existieren mit $\mu(x) \geq \epsilon$ und $|f(t)| \geq \epsilon$ für alle $t \in X$ (μ Lebesgue-Maß). Da $M : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)$ konvex ist (und $M(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$), ist M streng monoton und $M(t) \to \infty$ für $t \to \infty$., d.h. es existiert $c > 0$, so dass $M(|f(t)|/c) > 1/\epsilon$ für alle $t \in X$, also $\int_{\mathbb{R}} M(|f(t)|/c)dt > 1$ und daher $\|f\|_M > 0$.

   Sei $f \in L_M$ und $c > 0$ derart, dass $\infty > a \geq \int_{\mathbb{R}} M(|f(t)|/c)dt$. Falls $a > 1$ ist, erhält man

   $$\int_{\mathbb{R}} M(|f(t)|/(ac))dt = \int_{\mathbb{R}} M(|f(t)|/(ac) + (1-1/a)0)dt \leq (1/a)\int_{\mathbb{R}} M(|f(t)|/c) + (1-1/a)M(0)dt = 1.$$

   Sei f_n eine Cauchy-Folge in $(L_M, \|\cdot\|_M)$. Dann existiert eine Teilfolge, die ebenfalls mit f_n bezeichnet werde, so dass $\|f_{n+1} - f_n\|_M \leq 1/2^n$, d.h. $\int_{\mathbb{R}} M(\|f_{n+1} - f_n|(t)/2^n) \leq 1$.

   Definiere $v_m(t) = \sum_{n=1}^{m} |f_{n+1} - f_n|(t)$. Dann gilt

   $$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} M(v_m(t))dt &\leq \int_{\mathbb{R}} M\left(\frac{v_m(t)}{\sum_{n=1}^m 1/2^n}\right) dt = \int_{\mathbb{R}} M\left(\sum_{n=1}^{m} 1/2^n \frac{|f_{n+1} - f_n|(t)}{(\sum_{j=1}^m 1/2^j)(1/2^n)}\right) dt \\ &\leq \sum_{n=1}^{m} \frac{1/2^n}{\sum_{k=1}^m 1/2^k}\int_{\mathbb{R}} M\left(\frac{|f_{n+1} - f_n|(t)}{1/2^n}\right) dt \leq 1,\end{aligned}$$

   also $v_m \in L_M$ und $\|v_m\|_M \leq 1$ für alle $m \geq 1$.

   Aus dem Satz über monotone Konvergenz folgt, dass $\int_{\mathbb{R}} \lim_{m\to\infty} M(v_m(t))dt = \lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}} M(v_m(t))dt \leq 1$ und daher dass $v_m(t)$ f.ü. gegen ein $v(t) < \infty$ konvergiert und dass $v \in L_M$ und $\|v\|_M \leq 1$.

   Es ist $f_{n+1} = f_1 + \sum_{k=1}^{n}(f_{n+1} - f_n)$, weshalb f_n punktweise fast überall gegen eine Funktion f konvergiert, und wegen $|f_n(\cdot)| \leq |f_1(\cdot)| + v(\cdot) \in \mathcal{L}_M$ und dem Satz von der dominierten Konvergenz ist

   $$\int_{\mathbb{R}} M(|f(t)|/c) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} M(|f_n(t)|/c) \leq \int_{\mathbb{R}} M((|f_1|(t) + v(t))/c) < \infty$$

für geeignetes $c > 0$ und $f \in L_M$. Ferner gilt mit dem Lemma von Fatou

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} M\left(\frac{|f-f_n|(t)}{\sum_{k=n}^{\infty} 1/2^k}\right) dt &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{m\to\infty} M\left(\frac{|f_m-f_n|(t)}{\sum_{k=n}^{m-1} 1/2^k}\right) dt \\ &\le \liminf_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} M\left(\sum_{k=n}^{m-1} \frac{(1/2^k)|f_{k+1}-f_k|(t)}{(1/2^k)(\sum_{j=n}^{m-1} 1/2^j)}\right) dt \\ &\le \sum_{k=n}^{m-1} \frac{(1/2^k)}{(\sum_{j=1}^{m-1} 1/2^j)} \int_{\mathbb{R}} M\left(\frac{|f_{k+1}-f_k|(t)}{(1/2^k)}\right) dt \le 1,\end{aligned}$$

also $\|f-f_n\|_M \le \sum_{k=n}^{\infty}(1/2^k)$.

Dass H_M ein Unterraum von L_M ist, folgt wieder sofort aus i) und ii).
Sei jetzt (f_n) eine Cauchy-Folge in H_M, die gegen $f \in L_M$ ($\lim_{n\to\infty} \|f-f_n\|_M = 0$) konvergiert. Sei $c > 0$ beliebieg und n groß genug. Dann gilt $\int_{\mathbb{R}} M(|f|(t)/c)dt \le \int_{\mathbb{R}} M(|f-f_n|(t)/c + |f_n(t)|/c)dt \le 1/2 \int_{\mathbb{R}} M(|f-f_n|(t)/(c/2))dt + 1/2 \int_{\mathbb{R}} M(|f_n(t)|/(c/2))dt < \infty$, d.h. H_M ist abgeschlossen.

Da aus $\int_{\mathbb{R}}(|f(t)|/c)^p < \infty$ für ein $c > 0$ auch $\int_{\mathbb{R}}(|f(t)|/d)^p = (c/d)^p \int_{\mathbb{R}}(|f(t)|/c)^p < \infty$ für alle $d > 0$ folgt, ist $L_M = H_M$ im Falle $M(t) = t^p$.

Definiere $f(t) = 0$ für $t \le 0$ und $t \ge 1$, $f(t) = \sqrt{\ln 2^n}$ für $1/2^n \le t < 1/2^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\int_{\mathbb{R}}[\exp((|f(t)|/c)^2) - 1]dt = \sum_{n=1}^{\infty}(1/2^{n-1} - 1/2^n)[\exp((\sqrt{\ln 2^n}/c)^2) - 1] = \sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n[(2^n)^{1/c^2} - 1] = \sum_{n=1}^{\infty}(2^n)^{(1/c^2)-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$, was für $c > 1$ konvergiert, aber für $c \le 1$ divergiert, also $f \in L_M$ und $f \notin H_M$.

2. Sei $\Omega = [0,\infty)$, μ Lebesgue-Maß, $f_n := \mathbf{1}_{[n-1,n]}$, $n = 1, 2, \ldots$, und $f \equiv 0$. Dann gilt $f_n \to f$ punktweise überall, aber $\|f_n - f\|_p = 1$ für alle $n = 1, 2, \ldots$ und $1 \le p < \infty$.
   Sei jetzt $\Omega = [0,1]$, μ wieder Lebesgue-Maß, $f_n := \mathbf{1}_{[k_m 2^m, (k_m+1)2^m]}$, $n = k_m 2^m$, $m = 1, 2, \ldots$, $0 \le k_m \le 2^m - 1$, und $f \equiv 0$. Dann gilt $\lim \|f_n - f\|_p = 0$, $1 \le p < \infty$, aber für kein $x \in [0,1]$ gilt $f_n(x) \to f(x) = 0$.

3. Für $\|f\|_\infty = \infty$ und $\|f\|_\infty = 0$ ist nichts zu zeigen. Also sei (aufgrund der Homogenität der Normen) o.B.d.A. $1 \le \|f\|_\infty = M < \infty$.
   Wegen $\|f\|_q < \infty$ und $0 < \|f\|_\infty = M$ gilt für jedes $\epsilon > 0$, dass $0 < \mu(\{x : |f(x)| \ge (1-\epsilon)M\}) = A_\epsilon < \infty$, und es folgt

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \ge \liminf_{p\to\infty}(A_\epsilon(1-\epsilon)^p M^p)^{1/p} = (1-\epsilon)M.$$

   Schreib jetzt $\Omega = \dot\cup_{n\ge 0}\Omega_n$, wobei $\Omega_0 = \{x \in \Omega : f(x) = 0\}$, $\Omega_1 = \{x \in \Omega : \|f(x)| \ge 1\}$ und $\Omega_n = \{x \in \Omega : 1/(n-1) > |f(x)| \ge 1/n)\}$, $n \ge 2$.
   Aus $\infty > \|f\|_q^q = \int_{\Omega_1} |f|^q d\mu + \sum_{n>1} \int_{\Omega_n} |f|^q d\mu$ folgt dann, dass eine Menge $X \subseteq \Omega$ existiert mit $\mu(X) =: A < \infty$ und $\int_{\Omega\setminus X} |f|^p d\mu \le 1 \le M^p$ für alle $p \ge q$. Man erhält somit

$$\limsup_{p\to\infty}(\int_\Omega |f|^p d\mu)^{1/p} = \limsup_{p\to\infty}(\int_{\Omega\setminus X} |f|^p d\mu + \int_X |f^p| d\mu)^{1/p} \le \limsup_{p\to\infty}(M^p + AM^p)^{1/p} = M.$$

4. $\displaystyle\int_\Omega |f|^p = \int_\Omega |f|^{\theta p}|f|^{(1-\theta)p} \leq \left[\int_\Omega (|f|^{\theta p})^{\frac{p_1}{\theta p}}\right]^{\frac{\theta p}{p_1}} \left[\int_\Omega (|f|^{(1-\theta)p})^{\frac{p_0}{(1-\theta)p}}\right]^{\frac{(1-\theta)p}{p_0}} = (\|f\|_{p_1}^{\theta}\|f\|_{p_0}^{1-\theta})^p$
und ähnlich für $p_1 = \infty$.