Funktionalanalysis

Lösung zu Blatt 12

---

1. Für beliebige $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ definiere $d(z_1, z_2) = |z_1 + z_2|^p + |z_1 - z_2|^p$.
Wir bestimmen bei festem $|z_1|$ und $|z_2|$ das Maximum m von $d(z_1, z_2)$.
Für $z_1 = 0$ bzw. $z_2 = 0$ ist $m = d(z_1, z_2) = 2|z_2|^p$ bzw. $m = d(z_1, z_2) = 2|z_1|^p$.
Schreibe $|z_1| = a > 0$ und $z_2 = z_1 a^{-1} b e^{i\phi}$, d.h. $b = |z_2| > 0$. d hängt dann nur noch vom Winkel ϕ ab
$$d(\phi) = |a + be^{i\phi}|^p + |a - be^{i\phi}|^p = (a^2 + b^2 + 2ab\cos\phi)^{p/2} + (a^2 + b^2 - 2ab\cos\phi)^{p/2}.$$
Es ist $d'(\phi) = -pab\sin\phi(a^2 + b^2 + 2ab\cos\phi)^{p/2-1} + pab\sin\phi(a^2 + b^2 - 2ab\cos\phi)^{p/2-1}$ mit Nullstellen $\phi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ und eine einfache Kurvendiskussion unter Ausnutzung, dass $t^{\frac{p}{2}-1}$ streng monoton fallend ist, zeigt dass $m = d(\pi/2) = d(3\pi/2) = 2(a^2 + b^2)^{p/2}$. Wegen $p/2 \leq 1$ gilt $2(a^2 + b^2)^{p/2} \leq (a^2)^{p/2} + (b^2)^{p/2} = 2a^p + 2b^p$. Man hat daher für alle $t \in \Omega$ die Ungleichung $|f(t) + g(t)|^p + |f(t) - g(t)|^p \leq 2|f(t)|^p + 2|g(t)|^p$ und erhält nach Integration die Behauptung.

2. Sei $1/q := 1/p_1 + +1/p_{n-1}$ und $p := p_n$. Dann folgt aus der Hölder-Ungleichung und mit Induktion
$$\begin{aligned}\|f_1 \cdots f_n\|_1 \leq \|f_1 \cdots f_{n-1}\|_q \|f_n\|_p = \|f_1^q \cdots f_{n-1}^q\|_1^{1/q} \|f_n\|_p &\leq \|f_1^q\|_{p_1/q}^{1/q} \cdots \|f_{n-1}^q\|_{p_{n-1}/q}^{1/q} \\ &= \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_n\|_{p_n}.\end{aligned}$$

3. Es ist
$$\|\gamma_g\| = \sup_{f \in L^p,\, \|f\|_p > 0} \left|\int_\Omega f \cdot g\, d\mu\right| / \|f\|_p \leq \sup_{f \in L^p,\, \|f\|_p > 0} \left(\int_\Omega |f \cdot g|\, d\mu\right) / \|f\|_p \leq (\|f\|_p \|g\|_q)/\|f\|_p = \|g\|_q.$$
Da für $f = |g|^{q-2}\overline{g} \in L^p$ in den Ungleichungen jeweils Gleichheit gilt, folgt $\|\gamma_g\| = \|g\|_q$, d.h. die lineare Abbildung γ ist isometrisch. Aufgrund des Satzes von der offenen Abbildung bleibt nur noch die Surjektivität zu zeigen.
Angenommen $h \in (L^p(\Omega, \mu))'$, $h \notin L^q(\Omega, \mu)$. Dann existiert mit Hahn-Banach ein $g \in (L^p(\Omega, \mu))'' = L^p(\Omega, \mu)$ mit $\langle g, f\rangle = 0$ für alle $f \in L^q(\Omega, \mu)$ und $\langle g, h\rangle \neq 0$. Nun ist aber $0 = \langle g, f\rangle = \int_\Omega f \cdot g\, d\mu$ für alle $f \in L^q(\Omega, \mu)$; das bedeutet $g(t) = 0$ f.ü. und damit $g = 0$ im Widerspruch zu $\langle g, h\rangle \neq 0$.

4. Sei (z_n) eine beliebige schwach konvergente Folge mit schwachem Grenzwert z. Dann gilt stets $|\langle z_n, f\rangle| \leq \|z_n\|_E \|f\|_{E'}$ für alle $f \in E'$, also $|\langle z, f\rangle| \leq (\liminf_{n\to\infty} \|z_n\|_E)\|f\|_{E'}$ für alle $f \in E'$ und damit $\|z\|_E = \|z\|_{E''} \leq \liminf_{n\to\infty} \|z_n\|$.
Für $\|x\| = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also o.B.d.A. $\|x\| > 0$.
Definiere $y = x/\|x\|$, $\lambda_n = \max\{\|x\|, \|x_n\|\}$ und $y_n = x_n/\lambda_n$. Wegen $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x\|$ konvergiert λ_n gegen $\|x\|$. Also konvergiert y_n und damit auch $(y_n/2 + y/2)$ schwach gegen y. Nach oben gesagtem und wegen $\|y_n\| \leq 1$ gilt $1 = \|y\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|y_n/2 + y/2\| \leq 1$, also $\lim_{n\to\infty} \|y_n/(2\|y_n\|) + y/2\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n/2 + y/2\| = 1$. Aus der gleichmäßigen Konvexität von E folgt nun $0 = \lim_{n\to\infty} \|y_n/\|y_n\| - y\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n - y\|$ und damit auch $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.