Funktionalanalysis

Lösung zu Blatt 14

1. Da $\mu(\Omega) < \infty$, ist $B_1^{(q)}(0) \subset L^p(\Omega)$ für $q \geq p$. Da die Funktion $f(t) = t^q$ konvex ist, ist $B_1^{(q)}(0)$ konvex. Sei f_n eine Cauchy-Folge bzgl. der $\| \cdot \|_p$-Norm in $B_1^{(q)}(0)$ mit Grenzwert $f \in L^p(\Omega)$, dann existiert eine Teilfolge f_{n_k}, die f.ü. gegen f konvergiert, und aus dem Lemma von Fatou folgt $\int_\Omega |f|^q \, d\mu = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} |f_{n_k}|^q \, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |f_{n_k}|^q \, d\mu \leq 1$, d.h. $B_1^{(q)}(0)$ ist abgeschlossen, was die Behauptung zeigt.

2. Sei S abschließbar und $x_n \to 0$, $Sx_n \to z$. Dann ist $z = \overline{S}0 = 0$.

   Für die andere Richtung zeigt man, dass $\overline{G(S)}$ (Abschluss bzgl. der Graphen-Norm) der Graph eines linearen Operators ist. Seien $(x, y) \in \overline{G(S)}$ und $(x, z) \in \overline{G(S)}$, d.h. es existieren Folgen x_n und x'_n mit $\lim_{n\to\infty}(x_n, Sx_n) = (x, y)$ und $\lim_{n\to\infty}(x'_n, Sx'_n) = (x, z)$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} x'_n - x_n = 0$ und damit $\lim_{n\to\infty} Sx'_n - Sx_n = y - z = 0$, d.h. $\overline{G(S)}$ ist tatsächlich der Graph eines Operators. Linearität und Abgeschlossenheit dieses Operators sind dann klar.

3. Es ist $\|x\| + \|(T + B)x\| \leq \|x\| + \|Tx\| + \|B\|\|x\| \leq (1 + \|B\|)(\|x\| + \|Tx\|)$ und $\|x\| + \|Tx\| = \|x\| + \|(T + B - B)x\| \leq (1 + \|B\|)(\|x\| + \|(T + B)x\|)$, d.h. die Graphen-Normen von T und $T + B$ sind äquivalent, also ist $T + B$ abgeschlossen.

   Wegen $G(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\}$ und $G(T^{-1}) = \{(Tx, x) : x \in D(T)\}$ ist ein injektiver Operator genau dann abgeschlossen, wenn sein Inverses abgeschlossen ist. Ferner ist nach obigem $\lambda - T$ genau dann abgeschlossen, wenn T abgeschlossen ist. Es folgt die Behauptung.

   Es konvergiere $x_n \to x$ und $TBx_n \to z$. Dann konvergiert Bx_n gegen Bx, also $Bx \in D(T)$ bzw. $x \in D(TB)$, und $TBx = z$.

   Es konvergiere $x_n \in \ker T$ gegen $x \in X$. Wegen $Tx_n = 0$ für alle n gilt $x \in D(T)$ und $Tx = 0$, also ist $x \in \ker T$ und $\ker T$ abgeschlossen.

4. Sei x_n eine gegen x konvergente Folge und Tx_n konvergiere gegen z. Dann gilt für alle $y \in H$

   $$(z, y) = \lim_{n\to\infty}(Tx_n, y) = \lim_{n\to\infty}(x_n, Ty) = (x, Ty) = (Tx, y),$$

   also $Tx = z$. Somit ist T abgeschlossen und nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen stetig.