Funktionalanalysis
Lösung zu Blatt 1

---

1. l^p ist VR: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p \quad \Rightarrow \quad \lambda(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ist klar.
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$. Dann ist

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n + b_n|^p \le 2^p \sum_{n\in\mathbb{N}} (\max\{|a_n|, |b_n|\})^p \le \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p + \sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n|^p < \infty,$$

also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$.
Definitheit und absolute Homogenität von $\|\cdot\|_p$ sind klar und ebenso die Dreiecksungleichung für $p = 1$.
Young-Ungleichung: Aufgrund der Konvexität der Exponentialfunktion folgt

$$|ab| = e^{\frac{1}{p}\ln|a|^p + \frac{1}{q}\ln|b|^p} \le \frac{1}{p} e^{\ln|a|^p} + \frac{1}{q} e^{\ln|b|^p} = \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q.$$

Hölder-Ungleichung: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^q$ mit $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p, \|(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_q = 1$. Dann ist $|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n| \le \frac{1}{p}\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p + \frac{1}{q}\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n|^q = 1$, woraus die Behauptung folgt.
Minkowski-Ungleichung: Von der ersten zur zweiten Zeile gelangt man, indem man die Hölder-Ungleichung mit $q = p/(p-1)$ anwendet

$$\begin{aligned}\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p^p &= \sum_{n\in} |a_n + b_n|^p \le \sum_{n\in} |a_n + b_n|^{p-1}|a_n| + \sum_{n\in} |a_n + b_n|^{p-1}|b_n| \\ &\le \Big(\sum_{n\in} (|a_n + b_n|^{p-1})^{(p/(p-1))}\Big)^{(p-1)/p} (\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p + \|(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p) \\ &= \|(a_n + b_n)_{n\in}\|_p^{p-1} (\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p + \|(b_n)_{n\in}\|_p).\end{aligned}$$

Vollständigkeit: Sei $A_n = (a_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy-Folge in l^p. Dann ist für alle $i \in \mathbb{N}$ die Folge a_i^n, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzewert b_i. Schreibe $B := (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^\infty$.
Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein N, so dass für alle $n, m \ge N$ gilt $\|A_n - A_m\|_p \le \epsilon$ und daher für jedes $M \in \mathbb{N}$ auch $(\sum_{i=1}^{M} |a_i^n - a_i^m|^p)^{1/p} \le \epsilon$. Mit $m \to \infty$ folgt $(\sum_{i=1}^{M} |a_i^n - b_i|^p)^{1/p} \le \epsilon$ für jedes $M \in \mathbb{N}$, also auch $(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i^n - b_i|^p)^{1/p} \le \epsilon$, d.h. $\lim_{n\to\infty} \|A_n - B\|_p = 0$, und wegen $B = (B - A_n) + A_n$ erhält man $B \in l^p$.
Der Fall l^∞ ist klar.

2. Dass $(C^k[-1,1], \|\cdot\|_k)$ ein normierter Vektorraum ist, ist klar.
Ist f_n eine Cauchy-Folge in $(C^k[-1,1], \|\cdot\|_k)$, so existieren die Grenzwerte $g_i := \lim_{n\to\infty} f_n^{(i)} \in C[-1,1]$, $i = 1, \ldots, k$. Zu zeigen bleibt $g_i = g_0^{(i)}$: Das folgt aus untiger Gleichung, wenn man beachtet, dass $|\frac{1}{h}(f_n(x+h) - f_n(x)) - f_n'(x)| = |f_n'(\xi) - f_n'(x)|$ für ein ξ zwischen x und $x + h$,

$$\begin{aligned}|\frac{1}{h}(g_0(x+h) - g_0(x)) - g_1(x)| &= |\frac{1}{h}(g_0(x+h) - f_n(x+h))| + |\frac{1}{h}(f_n(x+h) - f_n(x)) - f_n'(x)| \\ &\quad + |\frac{1}{h}(f_n(x) - g_0(x))| + |f_n'(x) - g_1(x)|\end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass $C^1[-1,1]$ nicht abgeschlossen in $(C^0[-1,1], \|\cdot\|_0)$ ist, nehme man z.B. die Folge $f_n(x) := |x|^{1+1/n}$. f_n konvergiert in $(C^0[-1,1], \|\cdot\|_k)$ gegen $g(x) := |x| \notin C^1[-1,1]$.
Für allgemeines k, schließe induktiv: $g_0 := g$, $f_{n,0} := f_n$ und $f_{n,k+1} := \int_0^x f_{n,k}(t)\,dt$ bzw. $g_{k+1}(x) := \int_0^x g_k(t)\,dt$. Dann gilt $f_{n,k} \to g_k$ mit $n \to \infty$ in $(C^k[-1,1], \|\cdot\|_k)$, aber $g_k^{(k+1)} = |x|$, also $g_k \notin C^{(k+1)}$.

3. Man betrachte die Funktionenfolge $f_n(x) := \begin{cases} x^n & 0 \leq x, \leq 1 \\ 1 & 1, \leq x \leq 2 \end{cases} \in C[0,2]$. Ist $g \in C[0,2]$ Grenzwert von f_n inbezüglich der $\|\cdot\|_p$-Norm, dann muss notwendigerweise gelten $g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$, also existiert kein Grenzwert in $C[0,2]$.

4. a) Wir ahmen den Beweis des Satzes von Baire aus der Vorlesung nach, nur im Komplement sozusagen.
Sei ω eine nichtleere, offene Menge in X. Man zeigt $\omega \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n) \neq \emptyset$.
Wähle $x \in \omega$ und $r_0 > 0$ mit $\overline{B(x_0, r_0)} \subset \omega$ (wobei $B(x,r) := \{y \in X : d(x,y) < r\}$). Fahre dann induktiv fort und wähle x_{n+1} und r_{n+1} mit $\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(x_n, r_n) \cap O_{n+1}$ und $0 < r_{n+1} < r_n/2$, was möglich ist, da O_{n+1} offen und dicht ist. Es folgt, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist und damit gegen ein ein $z \in \omega \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n)$ konvergiert.

   b) O_n ist dicht: Sei $f \in C[0,1]$. Man zeigt: Zu jedem ϵ existiert ein $g \in O_n$ mit $\|g - f\|_\infty \leq \epsilon$.
Es existiert δ mit $0 < \delta < \epsilon/(2n)$, so dass für alle $x \in [0,1]$ und alle $|h| < \delta$ gilt $|f(x+h) - f(x)| < \epsilon/2$.
Betrachte jetzt die Funktion $g(x) := f(x) + \epsilon \sin(\frac{2\pi}{\delta} x)$. Es ist $\|g - f\|_\infty \leq \epsilon$. Ferner existiert zu jedem $x \in [0,1]$ ein $|h| < \delta$ mit $|g(x+h) - g(x)| \geq (\epsilon - |f(x+h) - f(x)|) > \epsilon/2$, also $|\frac{g(x+h) - g(x)}{h}| > \frac{\epsilon/2}{\epsilon/(2n)} = n$.
O_n offen: Sei $g \in O_n$. Man zeigt: Es existiert $\epsilon > 0$, so dass für alle $f \in C[0,1]$ mit $\|f\|_\infty < \epsilon$ gilt $f + g \in O_n$.
Wir wissen, dass es zu jedem $x \in [0,1]$ ein $0 < |h_x| < 1/n$ gibt mit $|g(x+h_x) - g(x)| - n|h_x| > 2\gamma_x > 0$ und damit ein δ_x, so dass $|g(y+h_x) - g(y)| - n|h_x| > \gamma_x > 0$ für $|x - y| < \delta_x$. Da $[0,1]$ kompakt ist, existieren endlich viele $x_i \in [0,1]$, $i = 1, \ldots, k$, so dass $[0,1] = \cup_{i=1}^k (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i})$. Wähle $\epsilon := \frac{1}{2} \min_{i=1,\ldots,k} \gamma_{x_i}$ und sei $\|f\|_\infty < \epsilon$. Dann gilt für jedes $i = 1, \ldots, k$ und jedes $y \in (x_i - \delta_{x_i}, x_i + \delta_{x_i})$

$$\begin{aligned} |g(y+h_{x_i}) + f(y+h_{x_i}) - g(y) - f(y)| - n|h_{x_i}| &\geq (|g(y+h_{x_i}) - g(y)| \\ &\quad - |f(y+h_{x_i})| - |f(y)|) - n|h_{x_i}| \\ &> \gamma_{x_i} - 2\epsilon \geq 0. \end{aligned}$$

Also liegt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ dicht in $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, und jedes $f \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ ist nach Konstruktion an keinem Punkt differenzierbar.