Funktionalanalysis
Lösung zu Blatt 2

---

1. a) $\|\cdot\|_p \le \|\cdot\|_q$, $1 \le q < p \le \infty$: Der Fall $p = \infty$ ist klar.

   Wir zeigen zuerst $\sum_{i=1}^n |a_i|^p \le (\sum_{i=1}^n |a_i|)^p$, $1 \le p$, für beliebige $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Der Fall $n = 1$ ist offensichtlich. Per Induktion gilt $F(x) := \sum_{i=1}^n |a_i|^p + x^p - (\sum_{i=1}^n |a_i| + x)^p \le 0$ für $x = 0$, und $\frac{d}{dx}F(x) = px^{p-1} - p(\sum_{i=1}^n |a_i| + x)^{p-1} \le 0$ für alle $x \ge 0$, woraus wegen $\sum_{i=N}^\infty |a_i|^p \to 0$ mit $N \to \infty$ die Behauptung folgt.

   Für beliebiges $q \le p$ schreibe $\sum_{i=1}^n (|a_i|^q)^{p/q} \le (\sum_{i=1}^n |a_i|^q)^{p/q}$. Es folgt $\|\cdot\|_p \le \|\cdot\|_q$.

   Die Inklusionen $c_{00} \subseteq l^q \subseteq l^p \subseteq c_0 \subseteq c \subseteq l^\infty$, $1 \le q < p < \infty$, sind jetzt trivial. Um $l^q \subsetneq l^p$ einzusehen, nehme man z.B. die Folge $x_q := (1/n^{1/q})_{n\in\mathbb{N}}$, für $c_{00} \subsetneq l^q$ die Folge $x_{q/2}$ und für $\bigcup_{1\le q<\infty} l^q \subsetneq c_0$ die Folge $(1/\ln n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Ferner liegt c_{00} dicht in c_0, weil für jede Folge $a := (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$, die Folge $b_i := (b_n^i)_{n\in N} \in c_{00}$, definiert durch $b_n = a_n$ für $n \le i$ und $b_n = 0$ sonst, gegen a konvergiert.

   Es bleibt noch $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ für alle $x \in l^1$ zu zeigen.

   Sei $x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$. Dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{n=N}^\infty |x_n| \le \epsilon$. Definiere $y := (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $y_n = x_n$ für $n < N$ und $y_n = 0$ sonst und $z := (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $z_n = 0$ für $n < N$ und $z_n = x_n$ sonst. y und z sind in l^p für alle $1 \le p \le \infty$ und $x = y + z$. Setze $m := \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Es folgt
   $$m \le \|x\|_p \le \|y\|_p + \|z\|_p \le \|y\|_p + \|z\|_1 \le (Nm^p)^{1/p} + \epsilon,$$
   also wegen $\lim_{p\to\infty} N^{1/p} = 1$ die Behauptung.

   b) Sei $x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c$ und $a := \lim_{n\to\infty} x_n$; definiere einen beschränkten, linearen Operator T von c nach c_0 durch $Tx = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$, wobei $y_1 = a$ und $y_{n+1} = x_n$ für $n \ge 1$. Sei jetzt $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$; definiere einen beschränkten, linearen Operator S von c_0 nach c durch $Sx = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c$, wobei $y_n = x_{n+1} - x_1$. Dann sieht man leicht, dass $TS = Id_{c_0}$ und $ST = Id_c$, d.h. T ist ein Isomorphismus.

2. $\mathcal{P} = \cup_{n\in\mathbb{N}} P_n$, wobei $P_n := \{f \in \mathcal{P} : \operatorname{grad} f \le n$ ein $(n+1)$-dimensionaler Vektorraum ist und damit ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{P}$ (Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{R}^{n+1}$). Ein abgeschlossener Unterraum eines Banachraums ist aber entweder der ganze Raum oder nirgends dicht. Also ist $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ von erster Kategorie in sich. Insbesondere ist auch $\mathcal{P}$, aufgefasst als Unterraum von $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, von 1. Kategorie.

3. Sei $1 \le q < p \le \infty$. Es gilt $l^q = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in l^q | \|x\|_q \le n\}$. Wir zeigen, F_n ist abgeschlossen. Dann folgt, da es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $y \in l^p \setminus l^q$ gibt mit $\|y - x\|_p \le \epsilon$, dass F_n nirgends dicht ist.
   Sei $x_m = (x_i^m)_{i\in\mathbb{N}} \in F_n$, $m = 1, 2, \dots$, eine Cauchy-Folge bezüglich der l^p-Norm und $y = (y_i)$ deren Grenzwert. Dann gilt für alle $N \in \mathbb{N}$, wegen $\sum_{i=1}^N |x_i^m|^q \le n^q$ für alle $m \in \mathbb{N}$, auch $\sum_{i=1}^N |y_i|^q \le n^q$ und damit $\sum_{i=1}^\infty |y_i|^q \le n^q$, d.h. $y \in F_n$.

   Der zweite Aussage folgt aus $\bigcup_{1\le q<p} l^q = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} l^{p-1/n}$.

4. a) Sei $T^n : X \mapsto X$ eine Kontraktion. Dann hat T^n genau einen Fixpunkt y. Wegen $T^n x = x$ für

alle Fixpunkte von T hat auch T höchstens einen Fixpunkt und wegen $T^n(Ty) = T(T^n y) = Tx$ ist Ty Fixpunkt von T^n also $Ty = y$.
b) Der Fall $\lambda = 0$ ist trivial. Sei o.B.d.A. $[a, b] = [0, 1]$
Definiere $T : C[0, 1] \mapsto [0, 1]$ durch $Tf(x) = \lambda \int_0^x K(x, y)f(y)dy + \phi(x)$. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Volterra-Gleichung ist dann mit Teil a) äquivalent zur Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes von T^n für ein $n \in \mathbb{N}$.
Sei $M := \max_{(x,y)\in[0,1]^2} |K(x, y)|$. Es ist

$$|Tf(x) - Tg(x)| = |\lambda| \int_0^x K(x, y)(f(y) - g(y))dy| \leq |\lambda|M\|f - g\|_\infty x$$

und per Induktion

$$\begin{aligned} |T^{n+1}f(x) - T^{n+1}g(x)| &= |\lambda| \int_0^x K(x, y)(T^n f(y) - T^n g(y))dy| \\ &\leq \frac{|\lambda|^{n+1}M^{n+1}}{n!}\|f - g\|_\infty \int_0^x y^n \, dy = \frac{|\lambda|^{n+1}M^{n+1}}{(n+1)!}\|f - g\|_\infty x^{n+1}. \end{aligned}$$

Aus $\lim_{n\to\infty} \frac{|\lambda|^n M^n}{n!} = 0$ folgt, dass T^n für n groß genug eine Kontraktion ist.