Funktionalanalysis

Lösung zu Blatt 4

1. a) Seien $x, y \in \overline{C}$ und $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ $(0 \leq \lambda \leq 1)$. Dann existieren Folgen x_n und y_n mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Es folgt $\lim_{n\to\infty} \lambda x_n + (1-\lambda)y_n = z$.
Seien $x, y \in \operatorname{int} C$. Dann existiert $\epsilon > 0$ mit $B(x,\epsilon), B(y,\epsilon) \subseteq C$. Sei $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ $(0 \leq \lambda \leq 1)$. Jedes $z' \in B(z,\epsilon)$ läßt sich schreiben als $\lambda(x + z' - z) + (1-\lambda)(y + z' - z)$, also $z' \in \operatorname{int} C$.
$\overline{\operatorname{int} C} \subseteq \overline{C}$ ist klar. Sei jetzt $z \in \overline{C}$ und z_n eine Folge in C, die gegen z konvergiert. Sei $x \in \operatorname{int} C$ und $B(x,\epsilon) \subseteq C$, $\epsilon > 0$. Dann ist für jedes z_n der offene Kegel $K_n := \{y = \lambda x' + (1-\lambda)z_n : \|x' - x\| < \epsilon,\ 0 < \lambda \leq 1\}$ Teilmenge von $\operatorname{int} C$, weshalb eine Folge z'_n mit $z'_n \in \operatorname{int} C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert, die ebenfalls gegen z konvergiert, d.h. $\overline{C} \subseteq \overline{\operatorname{int} C}$.
$\operatorname{int} C$ ist eine offene und konvexe Menge, weshalb ein $f \in X'$ existiert mit $f(x) \leq f(y)$ für alle $x \in \operatorname{int} C$ und $y \in D$ und daher aufgrund der Stetigkeit von f auch $f(x) \leq f(y)$ für alle $x \in \overline{\operatorname{int} C} \supseteq C$ und $y \in D$.

   b) Dass H konvex und abgeschlossen ist, ist klar. Sei nun $x \in H$ und $y := (1/n)_{n\in N} \in l^2$. Dann ist $x + \delta y \notin H$ für jedes $\delta > 0$ und somit x kein innerer Punkt.

2. Gleichheit in der Dreiecksungleichung, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, gilt bei Hilberträumen genau dann (man sehe sich den Beweis der Cauchy-Schwarz-Ungleichung an), wenn x ein Vielfaches von y ist, also im Falle $\|x\|, \|y\| = 1$ genau dann, wenn $x = y$.
Wegen der strikten Konvexität der Exponetialfunktion gilt Gleichheit in der Young-Ungleichung, $ab \leq (1/p)a^p + (1/q)b^q$ $(1 < p < \infty)$, genau dan, wenn $a^p = b^q$, und damit in der Hölder-Ungleichung, $\sum a_n b_n \leq \|(a_n)\|_p \|(b_n)\|_q$, genau dann wenn $a_i^p/(\|(a_n)\|_p^p) = b_i^q/(\|(b_n)\|_q^q)$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
Für die Minkowski-Ungleichung, $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ $(1 < p < \infty)$, folgt, dass Gleichheit genau dann besteht, wenn $\operatorname{sign} x_i = \operatorname{sign} y_i$ und $x_i^p/(\|(x_n)\|_p^p) = ((x_i + y_i)^{p-1)})^q/(\|(x_n + y_n)^{p-1}\|_q^q)$, wobei $q = p/(p-1)$, für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt und das gleiche mit x und y vertauscht, weshalb x ein Vielfaches von y sein muss.
Ein Gegenbeispiel für l^∞ sind die Folgen $(1, 0, 0, \ldots)$ und $(1, 1, 0, \ldots)$ und für l^1 die Folgen $(1, 0, 0, \ldots)$ und $(0, 1, 0, \ldots)$.

   Seien f und $\hat{f}$ zwei Funktionale, die g auf ganz X fortsetzen, und o.B.d.A. $\|g\| = \|f\| = \|\hat{f}\| = 1$. Dann gilt wegen der strikten Konvexität von X', dass $1 \leq \|(f + \hat{f})/2\| \leq 1$, da $f(x) = \hat{f}(x) = g(x)$ für alle $x \in U$, also $f = \hat{f}$.

3. Da E endlich-dimensional ist und damit separabel, existiert eine Teilmenge $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$, die dicht in E liegt, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B(y_i, 1/n) = E$. Wähle nun, falls vorhanden, zu $i, n \in \mathbb{N}$ ein $z_{i,n} \in B(y_i, 1/n) \cap C$. Dann ist die derart gewählte Menge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abzählbar und dicht in C.
Wegen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ liegt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ dicht in C. Sei nun $z_m = \sum_{i=1}^n \lambda_m^i x_i$ $(\sum_{i=1}^n \lambda_m^i = 1,\ \lambda_m^i \geq 0)$ eine Folge in C_n. Dann existiert eine Teilfolge m_k, so dass $\lambda_{m_k}^i$ gegen ein λ^i konvergiert $(\sum_{i=1}^n \lambda^i = 1,$ $\lambda^i \geq 0)$ und somit z_{m_k} gegen $\sum_{i=1}^n \lambda^i x_i \in C_n$ konvergiert; d.h. C_n ist kompakt.
Da C_n kompakt ist und $0 \notin C_n$, existiert ein $f_n \in E'$ mit $f_n(x) \geq 0$ für alle $x \in C_n$, $\|f\| = 1$.
Da E endlich-dimensional ist, ist auch E' endlich-dimensional und somit die Menge $\{f \in E' : \|f\| = 1\}$ kompakt. Das bedeutet, dass die Folge der f_n eine konvergente Teilfolge besitzt. Sei f deren Grenzwert. Dann ist $\|f\| = 1$ und, weil $C_n \subseteq C_{n+k}$ für $k \geq 0$, ist auch $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}$ und damit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in C$.
Es ist $0 \notin A - B$ und $A - B$ ist konvex, d.h. es existiert ein $f \in E'$ mit $f(a - b) \geq 0$, also $f(a) \geq f(b)$, für alle $a \in A$ und $b \in B$.

4. Dass X und Y abgeschlossene Unterräume sind (also insbesondere konvex), ist klar. Ferner ist $c_{00} \subset X + Y$ und somit $\overline{x + y} = E$ (für $z = (z_n) \in c_{00}$ wähle $(y_n) \in Y$ mit $y_{2n} = z_{2n}$ und $(x_n) \in X$

mit $x_{2n-1} = z_{2n-1} - 2^n y_{2n}$).
Aus $c = x + y$ mit $x = (x_n) \in X$ und $y = (y_n) \in Y$ folgt $y_{2n} = 1/(2^n)$ und daraus $y_{2n-1} = 1$ für alle $n \geq 1$, im Widerspruch zu $Y \subset E$.
Aus $z = (z_n) \in Y \cap Z$ folgt $z = x - c$ mit $x \in X$ und daraus $z_{2n} = -1/(2^n)$ und wegen $z \in Y$, dass $z_{2n-1} = -1$, im Widerspruch zu $Y \subset E$.
Sei $f(x - c) \geq f(y)$, d.h. $f(x - y) \geq f(c) = a$ ($a \in \mathbb{R}$), für alle $x \in X$ und alle $y \in Y$, also $f(z) \geq a$ für alle $z \in X + Y$ und daher für alle $z \in \overline{X + Y} = E$. Es folgt $f \equiv 0$. X und Y lassen sich also nicht durch eine Hyperebene trennen.