Funktionalanalysis

Lösung zu Blatt 6

1. Sei $A \subset X$ beschränkt und $T_1, T_2 \in K(X)$ und $(x_n) = ((T_1 + T_2)y_n)$ eine Folge in $(T_1 + T_2)(A)$. Dann existiert eine konvergente Teilfolge $(T_1 y_{n_k})$ von $(T_1 y_n)$ und eine konvergente Teilfolge $(T_2 y_{n_{k_l}})$ von $(T_2 y_{n_k})$. Daher ist $(x_{n_{k_l}})$ eine konvergente Teilfolge von (x_n) und somit $(T_1 + T_2) \in K(X)$. Dass $\alpha T_1 \in K(X)$ für $\alpha \in \mathbb{K}$, ist klar.
   Sei jetzt $T \in K(X)$ und $S \in \mathcal{L}(X)$ und wieder $A \subset X$ beschränkt. Dann ist auch $S(A)$ beschränkt und daher $T(S(A))$ relativ-kompakt, also $TS \in K(X)$.
   Ist $(x_n) = (S(Ty_n))$ eine Folge in $ST(A)$, dann besitzt (Ty_n) eine konvergente Teilfolge (Ty_{n_k}) und somit (x_n) die konvergente Teilfolge $(S(Ty_{n_k}))$, also $ST \in K(X)$.

   Sei $T_n \in K(X)$ eine Folge, die gegen $T \in \mathcal{L}(X)$ konvergiert, und sei $A \subset X$ beschränkt. Sei $\epsilon > 0$ und n groß genug, so dass $\|T_n(x) - T(x)\| \leq \epsilon$ für alle $x \in A$. Da $T_n(A)$ präkompakt ist, existieren endlich viele $x_1, \ldots, x_k \in A$ mit $T_n(A) \subset \cup_{i=1}^k B_\epsilon(T_n(x_i))$ und somit $T(A) \subset \cup_{i=1}^k B_{3\epsilon}(T(x_i))$.

2. Wähle $y_n = x_n^{-1}/\|x_n^{-1}\| \in G(A)$ mit $x_n \to x \in \partial G(A)$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} x x_n^{-1}/\|x_n^{-1}\| = \lim_{n\to\infty} x_n x_n^{-1}/\|x_n^{-1}\| = 0 = \lim_{n\to\infty} (x_n^{-1}/\|x_n^{-1}\|)x.$$

   Ist 0 der einzige topologische Teiler der Null, dann besitzt $G(A)$ keine Randpunkte außer der 0. Das bedeutet aber $G(A) = A/\{0\}$, weshalb aus dem Satz von Gelfand-Mazur $A = \mathbb{C}$ folgt.

3.
   - $$\begin{aligned} r(xy) &= \lim_{n\to\infty} \|(xy)^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|x(yx)^{n-1}y\|^{1/n} \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \|x\|^{1/n}\|y\|^{1/n}(\|(yx)^{n-1}\|^{1/(n-1)})^{(n-1)/n} = r(yx) \end{aligned}$$
     und genauso $r(yx) \leq r(xy)$ also $r(xy) = r(yx)$.
   - $y = x^{-1}(xy)$, also ist y invertierbar mir $y^{-1} = (xy)^{-1}x$.
   - $y(x(yx)^{-1}) = e$ und $x(y(xy)^{-1}) = e$ und damit

     $$(x(yx)^{-1})y = (x(yx)^{-1})y(xy(xy)^{-1}) = x(yx)^{-1}yx(y(xy)^{-1}) = e,$$

     also ist y invertierbar mit $y^{-1} = x(yx)^{-1}$ und genauso x mit $x^{-1} = y(xy)^{-1}$.
   - Sei z.B. $X = l^2$ und $A = \mathcal{L}(X)$. Sei $S_l \in \mathcal{L}(X)$ der Links-Shift, der gegeben ist durch $S_l(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = x_{n+1}$, und $S_r \in \mathcal{L}(X)$ der Rechts-Shift, definiert durch $S_r(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = x_{n-1}$ für $n \geq 2$ und $y_1 = 0$. Dann ist $S_l S_r x = x$ für alle $x \in l^2$, also $S_r S_l = Id$, aber z.B. $S_r S_l(1, 0, \ldots) = (0, 0, \ldots)$, d.h. $S_r S_l \neq Id$.

4.
   - $(e + y(e - xy)^{-1}x)(e - yx) = e - yx + y(e - xy)^{-1}x - y(e - xy)^{-1}xyx = e - y(e - xy)^{-1}(e - xy)x + y(e - xy)^{-1}xyx = e + y(e - xy)^{-1}(-(e - xy)x + x - xyx) = e$ und ähnlich $(e - yx)(e + y(e - xy)^{-1}x) = e$, also $(e - yx)^{-1} = (e + y(e - xy)^{-1}x)$.
   - $0 \neq \lambda \in \rho(xy) \Leftrightarrow (\lambda e - xy) \in G(A) \Leftrightarrow \lambda(e - \lambda^{-1}xy) \in G(A) \Leftrightarrow \lambda(e - \lambda^{-1}yx) \in G(A) \Leftrightarrow 0 \neq \lambda \in \rho(yx)$, also $\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}$.
     Beispiel zu $\sigma(xy) \neq \sigma(yx)$: $A = \mathcal{L}(l^2)$, $x = S_l$ und $y = S_r$ (siehe Aufgabe 3); dann ist $S_l S_r = Id$, also $0 \notin \sigma$, aber $S_r S_l$ ist nicht injektiv, also $0 \in \sigma(S_r S_l)$.