Funktionalanalysis
Lösung zu Blatt 7

---

1. Für jedes $\phi \in X'$ und jedes $x \in M$ gilt $|\phi(x)| \leq \|\phi\|\|x\| \leq \|\phi\|m$.
   Gelte nun ii). Dann ist die Familie $i_x : X' \mapsto \mathbb{K}$ $(x \in M)$ (mit $i_x(\phi) = \phi(x)$) nach Voraussetzung punktweise beschränkt, und damit gilt gemäß dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit auch $\|i_x\| = \|x\| \leq m$ für ein $m \geq 0$.

2. Definitheit ist klar. $(\lambda x|\lambda x)^{1/2} = |\lambda|(x|x)^{1/2}$ zeigt die absolute Homogenität und
   $\|x+y\|^2 = (x|x) + 2(\mathrm{Re})(x|y) + (y|y) \leq (x|x) + 2\|x\|\|y\| + (y|y) = (\|x\| + \|y\|)^2$ die Dreiecksungleichung.
   Polarisationsformeln und Parallelogrammgleichung folgen durch einfaches Ausrechnen.

3. Sei E normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ und erfülle $\|\cdot\|$ die Parallelogrammgleichung. Wir definieren $(x|y) := \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$ und zeigen $(x|y)$ beschreibt ein Skalarprodukt.

   - $(x|y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|y-x\|^2) = (y|x)$
   - $(x|x) = \frac{1}{4}\|2x\|^2 = \|x\|^2 \geq 0$ und $(x|x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
   - $(x+z|y) = \frac{1}{4}(\|x+z+y\|^2 - \|x+z-y\|^2)$. Aus der Parallelogrammgleichung folgt

     $$\begin{aligned}\|x+z+y\|^2 &= 2\|x+y\|^2 + 2\|z\|^2 - \|x+y-z\|^2 \\ &= 2\|z+y\|^2 + 2\|x\|^2 - \|z+y-x\|^2 \\ &= \|x+y\|^2 + \|z+y\|^2 + \|z\|^2 + \|x\|^2 - \frac{1}{2}(\|x+y-z\|^2 + \|z+y-x\|^2\end{aligned}$$

     und

     $$\begin{aligned}\|x+z-y\|^2 &= 2\|x-y\|^2 + 2\|z\|^2 - \|x-y-z\|^2 \\ &= 2\|z-y\|^2 + 2\|x\|^2 - \|z-y-x\|^2 \\ &= \|x-y\|^2 + \|z-y\|^2 + \|z\|^2 + \|x\|^2 - \frac{1}{2}(\|x+y-z\|^2 + \|z+y-x\|^2\end{aligned}$$

     und somit $(x+z|y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \|z+y\|^2 - \|z-y\|^2) = (x|y) + (z|y)$.
   - $(0|y) = 0$, also $(-x|y) = -(x|y)$, und $(x|y) = n(\frac{1}{n}x|y)$ für alle $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, also $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$ für alle $\lambda \in \mathbb{Q}$, und damit wegen Stetigkeit auch $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Sei $\zeta \in Z'$ und $x \in X$. Dann gilt $((ST)'\zeta)(x) = \zeta(S(Tx)) = (S'\zeta)(Tx) = (T'(S'\zeta))(x)$.
   Sei $x \in X$ und $\eta \in Y'$. Dann gilt $(T''(i_X(x)))\eta = i_X(x)(T'\eta) = (T'\eta)x = \eta(Tx) = (i_Y(Tx))\eta$.