Funktionalanalysis
Lösung zu Blatt 8

---

1. Betrachte die Kugeln $B_N(0) \subset X$, $N \in \mathbb{N}$. Da T kompakt ist, findet man zu jedem $N \in \mathbb{N}$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ endlich viele $X_1^{N,n}, \dots, x_{k(N,n)}^{N,n}$ mit $T(B_N(0)) \subset \cup_{i=1}^{k(n,N)} B_{1/n}(x_i^{N,n})$. Aus $\operatorname{rg} T = \cup_{N\in\mathbb{N}} T(B_N(0))$ folgt dann die Separabilität von $\operatorname{rg} T$.

2. Angenommen $x \notin V$. Dann existiert ein $\phi \in X'$ und ein $\epsilon > 0$ mit $\phi(y) \leq \phi(x) - \epsilon$ für alle $y \in V$ im Widerspruch zu $\phi(x_n - x) \to 0$ $(x_n \in V)$.
   Wähle jetzt $V := \overline{\operatorname{conv}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ als den Abschluss der Menge der Konvexkombinationen der x_n, dann wissen wir der Grenzwert von (x_n) liegt in V, woraus die zweite Behauptung folgt.

3. Sei T ein beschränkter, linearer Operator von c_0 nach ℓ^p und o.B.d.A. $\|T\| = 1$.
   Da $(c_0)' = \ell^1$ separabel ist, besitzt jede in c_0 beschränkte Folge eine schwache Cauchy-Teilfolge, und ist (a_n) eine schwache Cauchy-Folge in c_0, dann ist $(a_n - a_{n+m})_n$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine schwache Nullfolge. Konvergiert dann $(T(a_n - a_{n+m}))_n$ in ℓ^p-Norm gegen Null, ist $(Ta_n)_n$ eine in Norm konvergente Nullfolge. D.h. es genügt zu zeigen, dass schwache Nullfolgen in c_0 auf in ℓ^p-Norm konvergente Nullfolgen abgebildet werden.
   Es gilt für jede schwache Nullfolge $(w_n) = (w_n^i)_{i\in\mathbb{N}}$ in c_0 bzw. in ℓ^p und jedes $x \in c_0$ bzw. $x \in \ell^p$
   $$\limsup_{n\to\infty} \|x + w_n\|_\infty = \max\{\|x\|_\infty, \limsup_{n\to\infty} \|w_n\|_\infty\} \quad \text{bzw.}$$
   $$\limsup_{n\to\infty} \|x + w_n\|_p^p = \|x\|_p^p + \limsup_{n\to\infty} \|w_n\|_p^p,$$
   da für jede Komponente $\lim_{n\to\infty} w_n^i = 0$.
   Sei jetzt (h_n) eine schwache Nullfolge in c_0. Es existiert dann $M > 0$ mit $\|h_n\|_\infty \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $0 < \epsilon < 1$. Dann existiert $x_\epsilon \in c_0$mit $\|x_\epsilon\|_\infty = 1$ und $1 - \epsilon \leq \|Tx_\epsilon\|_p \leq 1$. Ferner gilt für jedes $t > 0$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ $\|Tx_\epsilon + T(th_n)\|_p \leq \|x_\epsilon + th_n\|_\infty$.
   Da $T(th_n)$ schwache Nullfolge in ℓ^p ist, folgt
   $$\begin{aligned}\|Tx_\epsilon\|_p^p + \limsup_{n\to\infty} \|T(th_n)\|_p^p &= \limsup_{n\to\infty} \|Tx_\epsilon + T(th_n)\|_p^p \leq \limsup_{n\to\infty} \|x_\epsilon + th_n\|_\infty^p \\ &= \max\{\|x_\epsilon\|_\infty^p, \limsup_{n\to\infty} \|th_n\|_\infty^p\} \leq \max\{1, t^p M^p\},\end{aligned}$$
   also
   $$\limsup_{n\to\infty} \|T(h_n)\|_p^p \leq \frac{1}{t^p}[\max\{1, t^p M^p\} - (1-\epsilon)^p].$$
   Sei jetzt $0 < \epsilon < M^{-2p}$ und $t = \epsilon^{\frac{1}{2p}}$, insbesondere also $t^p M^p \leq 1$. Man erhält
   $$\limsup_{n\to\infty} \|T(h_n)\|_p^p \leq \frac{1}{\epsilon^{1/2}}[1 - (1-\epsilon)^p]$$
   und mit $\epsilon \to 0$ die Behauptung.

4. Wegen $\|x_m\| = 1$ nimmt $d(\cdot,\cdot)$ nur endliche und natürlich nicht-negative Werte an. $d(\phi,\psi) = d(\psi,\phi)$, $d(\phi,\phi) = 0$ und $d(\phi,\psi) \leq d(\phi,\eta) + d(\eta,\psi)$ sind klar. Ferner folgt aus $d(\phi,\psi) = 0$, dass $|\langle \phi - \psi, y\rangle| = 0$ für alle $y \in \operatorname{span}\{x_m \in X : m \in \mathbb{N}\}$ und damit auch für alle $y \in X$, also $\phi = \psi$. D.h. $d(\cdot,\cdot)$ ist eine Metrik.
   Sei $\|\phi_n\|_{X'} \leq M$. Konvergiert (ϕ_n) gegen ϕ bezüglich der Metrik, dann konvergiert $|\langle \phi_n - \phi, x_m\rangle|$ $(m \in \mathbb{N})$ gegen Null und damit auch $|\langle \phi_n - \phi, y\rangle|$ für alle $y \in \operatorname{span}\{x_m \in X : m \in \mathbb{N}\}$. Sei nun $x \in X$ beliebig und $y \in \operatorname{span}\{x_m \in X : m \in \mathbb{N}\}$ mit $\|x - y\| \leq \epsilon$. Dann gilt
   $$\begin{aligned}|\langle \phi_n - \phi, x\rangle| &\leq |\langle \phi_n - \phi, y\rangle| + |\langle \phi_n, x - y\rangle| + |\langle \phi, x - y\rangle| \leq |\langle \phi_n - \phi, x\rangle| + (M + \|\phi\|_{X'})\|x - y\| \\ &\leq \epsilon + (M + \|\phi\|_{X'})\epsilon\end{aligned}$$

(für n groß genug), also konvergiert (ϕ_n) schwach* gegen ϕ.
Konvergiere nun (ϕ_n) schwach* gegen ϕ. Dann gilt

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} |\langle \phi_n - \phi, x_m \rangle| \leq \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{2^m} |\langle \phi_n - \phi, x_m \rangle| + \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} (M + \|\phi\|_{X'}) \|x_m\| \leq \epsilon,$$

wenn erst N und dann n groß genug gewählt wird.

Da X separabel und reflexiv ist, ist auch X'' und damit X' separabel, so dass obiges Argument auf $X'' = X$ angewendet werden kann.