

**Delio Mugnolo**

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# Funktionalanalysis

Delio Mugnolo

Institut für Analysis, Universität Ulm

Wintersemester 2011/12

Immer:  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$   
 $X, Y, \dots$  Vektorräume über  $\mathbb{K}$

## Definition.

Ein *Abstand  $d$  auf  $X$*  ist

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$$

s.d.

- (1)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ,
- (2)  $d(x, y) = d(y, x)$ , und
- (3)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ,

$\forall x, y, z \in X$ .

$(X, d)$  heißt dann *metrischer Raum*.

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Delio Mugnolo

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Beispiel.

$$d(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y, \\ 0 & \text{falls } x = y, \end{cases}$$

$(x, y \in X)$

definiert einen Abstand auf  $X$  ("**diskreter Abstand**").

$\Rightarrow$  Jede nichtleere Menge ist metrisierbar.

# $C[0, 1]$ als metrischer Raum

Beispiel.

$$d(f, g) := \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$$

$(f, g \in C[0, 1])$

*definiert einen Abstand auf  $C[0, 1]$ .*

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

## Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

## Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume $C^\infty[0, 1]$  als metrischer Raum

Beispiel.

$$d(f, g) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\max_{x \in [0,1]} |f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x)|}{\max_{x \in [0,1]} |f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x)| + 1}$$

 $(f, g \in C^\infty[0, 1])$ *definiert einen Abstand auf  $C^\infty[0, 1]$ .*

## Definition.

$(X, d)$  Vektorraum,  $x \in X$ ,  $A \subset X$ .

- (1)  $x$  heißt *innerer Punkt von A*, oder  $A$  heißt *Umgebung von x*, falls  $\exists r > 0$  s.d.

$$B_r(x) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\} \subset A.$$

- (2)  $A$  heißt *offen*, falls jedes  $x \in A$  ein innerer Punkt ist.
- (3)  $A$  heißt *abgeschlossen*, falls  $X \setminus A$  offen ist.

## Definition.

$(X, d_1), (Y, d_2)$  metrische Räume,  $f : (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$ ,  
 $x \in X$ .

- (1)  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  *konvergiert gegen  $x$  bzw.  $x$  ist Grenzwert von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bzw.  $\lim x_n = x$  bzw.  $x_n \rightarrow x$ , falls*

$$\lim d(x_n, x) = 0.$$

- (2)  $f$  heißt *stetig in  $x$* , falls

$$\lim x_n = x \quad \Rightarrow \quad \lim f(x_n) = f(x).$$

- (3)  $f$  heißt *stetig*, falls  $f$  *überall stetig ist*.

(Wie im Fall  $X = Y = \mathbb{K}$  kann Stetigkeit durch das  $\epsilon - \delta$ -Kriterium charakterisiert werden).

- ▶ Vereinigung *beliebig* vieler offenen Mengen ist offen
- ▶ Durchschnitt *endlich* vieler offenen Mengen ist offen

Weil

$$\bigcup (A_n^c) = \left( \bigcap A_n \right)^c \quad \text{und} \quad \bigcap (A_n^c) = \left( \bigcup A_n \right)^c$$

gilt auch:

- ▶ Durchschnitt *beliebig* vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen
- ▶ Vereinigung *endlich* vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen

Delio Mugnolo

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Delio Mugnolo

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume $(X, d_1), (Y, d_2)$  metrische Räume

Lemma.

(1)  $f : X \rightarrow Y$  ist genau dann stetig in  $x \in X$ , wenn $B$  Umgebung von  $f(x) \Rightarrow f^{-1}(B)$  Umgebung von  $x$ .(2)  $f : X \rightarrow Y$  ist genau dann stetig, wenn $B$  offen in  $Y \Rightarrow f^{-1}(B)$  offen in  $X$ .(3)  $f : X \rightarrow Y$  ist genau dann stetig, wenn $C$  abgeschlossen in  $Y \Rightarrow f^{-1}(C)$  abgeschlossen in  $X$ .

$(X, d)$  metrischer Raum

Definition.

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  heißt *Cauchy-Folge* falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.d. } d(x_n, x_m) < \epsilon \quad \forall n, m > N.$$

Lemma.

*Eine Cauchy-Folge konvergiert genau dann, wenn sie eine konvergente Teilfolge enthält.*

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

## Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

## Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

## Beispiel.

*Nur schließlich konstante Folgen sind Cauchy bzgl. des  
diskreten Abstands.*

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

## Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

## Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

## Definition.

$(X, d)$  heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge konvergiert.

## Definition.

$(X, d)$  metrischer Raum,  $A \subset X$

(1) Die Menge  $\overline{A}$  aller Grenzwerte von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  heißt **Abschluss** von  $A$ . (äquiv.:  $\overline{A}$  ist die kleinste abgeschlossene

Menge, die  $A$  enthält).

(2) Die Menge  $\partial A := \overline{A} \cap \overline{A^c}$  heißt **Rand** von  $A$ .

(3)  $A$  heißt **dicht in  $X$** , falls  $\overline{A} = X$ . (äquiv.:  $A$  ist dicht in  $X$ , falls

$$\forall x \in X \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \text{ s.d. } x = \lim x_n$$

d.h., falls

$$\forall x \in X \forall \epsilon > 0 \exists y \in A \text{ s.d. } d(x, y) < \epsilon.$$

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Delio Mugnolo

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

## Definition.

Eine **Norm**  $\| \cdot \|$  auf  $X$  ist  $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  s.d.

$$(1) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$(2) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$$

$$(3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\forall x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$$

$(X, \| \cdot \|)$  heißt dann **normierter Raum**.

- ▶ Jede Norm definiert einen Abstand durch

$$d(x, y) := \|x - y\|,$$

also ist jeder normierte Raum ein metrischer Raum.

- ▶ Nicht jeder metrische Raum ist normiert.  
Z.B. kommt die diskrete Metrik nicht aus einer Norm (außer, wenn  $X = \{0\}$ ), **denn sonst**

$$2\|x\| = \|2x\| = d(2x, 0) = 1 = d(x, 0) = \|x\| \quad \forall x \neq 0,$$

also  $1 = 0$ .



Delio Mugnolo

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$(X, \|\cdot\|)$  normierter Raum

**Definition.**

Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  heißt **beschränkt**, falls  $\exists M > 0$  s.d.

$$\|x_n\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

## Definition.

Zwei Normen  $\|\cdot\|$  und  $|\cdot|$  auf  $X$  heißen *äquivalent*, falls  $\exists c > 0$  s.d.

$$c\|x\| \leq |x| \leq \frac{1}{c}\|x\| \quad \forall x \in X.$$

(Konvergenz und Cauchy-Eigenschaft sind invariant unter Normenäquivalenz.)

Delio Mugnolo

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

## Definition.

Ein vollständiger normierter Raum  
heißt **Banachraum**.



Stefan Banach  
(1892–1945)

Delio Mugnolo

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Beispiel.

$$\|x\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

definiert eine Norm (und somit einen Abstand) auf  $\mathbb{C}^n$   
(**“Euklidische Norm”**).

Allgemeiner:  $\ell^p$ -Norme $I$  abzählbare Menge

Beispiel.

$$\|x\|_p := \left( \sum_{k \in I} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

definiert für alle  $p \in [1, \infty)$  eine Norm auf

$$\ell^p(I) := \{x = (x_k)_{k \in I} \subset \mathbb{C} : \|x\|_p < \infty\}$$

("ℓ<sup>p</sup>-Norm").(Üblich:  $\ell^p := \ell^p(\mathbb{N})$ )

## Beispiel.

### Die Vektorräume

$$c_0 := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \lim x_n = 0\},$$

$$c := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert}\}$$

und

$$\ell^\infty := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \sup |x_n| < \infty\}$$

sind normierte Räume bzgl.

$$\|x\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

Delio Mugnolo

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

## Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

## Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$X$  Banachraum

**Lemma.**

*Ein Unterraum von  $X$  ist genau dann selber ein Banachraum (für die induzierte Norm), wenn er in  $X$  abgeschlossen ist.*

# Vollständige normierte Räume

## Lemma.

Ein normierter Raum  $(X, \|\cdot\|)$  ist genau dann vollständig, wenn jede absolut konvergente  $X$ -wertige Reihe konvergiert, d.h., wenn  $\exists \lim_n \sum_{k=1}^n \|x_k\| \Rightarrow \exists \lim_n \sum_{k=1}^n x_k$ .

## Beweis.

$$\text{“}\Rightarrow\text{”} \quad \left\| \sum_{k=n+1}^m x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|x_k\|.$$

“ $\Leftarrow$ ”

- ▶ Es sei  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  Cauchy-Folge und betrachte eine Teilfolge  $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  s.d.  $\|y_{n_{k+1}} - y_{n_k}\| < 2^{-k} \forall k$ .
- ▶  $\sum_{k=1}^{\infty} (y_{n_{k+1}} - y_{n_k}) = \lim_m (y_{n_{m+1}} - y_{n_1})$  existiert (da  $\sum_{k=1}^{\infty} \|y_{n_{k+1}} - y_{n_k}\| < \infty$ ), etwa  $\sum_{k=1}^{\infty} (y_{n_{k+1}} - y_{n_k}) = x$ .
- ▶ Somit  $x + y_{n_1} = \lim_m y_{n_{m+1}} = \lim_n y_n$ .



$A \neq \emptyset$

Beispiel.

$$B(A) := \{f : A \rightarrow \mathbb{K} : \|f\|_\infty < \infty\}$$

ist ein Banachraum bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$ .

- ▶  $B(A)$  normierter Raum: klar.
- ▶  $B(A)$  vollständig: Es sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B(A)$  absolut konvergent, so ist

$$(*) \quad \left| \sum_{k=n}^m f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^m |f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^m \|f_k\|_\infty$$

$\forall n < m, \forall x \in A$ . Also konvergiert  $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$  in  $\mathbb{K} \forall x \in A$  (da  $\mathbb{K}$  vollständig) und wegen der Gleichmäßigkeit von  $(*)$  konvergiert auch  $\sum_{k=1}^\infty f_k$  in  $B(A)$ .

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# $C([a, b])$ ist ein Banachraum

Satz.

$C([a, b])$  ist ein Banachraum bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$ .

Beweis.

z.z.:  $C([a, b])$  ist abgeschlossener Unterraum von  $B([a, b])$ , d.h. für alle

$$\forall f \in \overline{C([a, b])} \quad \forall x_0 \in [a, b] \quad f \text{ ist stetig in } x_0.$$

$\forall \epsilon > 0$  gilt:

- ▶  $\exists g \in C([a, b])$  mit  $\|f - g\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}$ ;
- ▶ da  $g$  stetig,  $\exists \delta > 0$  mit  $|g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall x \in B_\delta(x_0)$ ;
- ▶ also gilt für dieses  $\delta > 0$ :  $\forall x \in B_\delta(x_0)$

$$\begin{aligned}
 |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0) - f(x_0)| \\
 &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}
 \end{aligned}$$

□

Delio Mugnolo

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$(X, d)$  vollständiger metrischer Raum

Theorem. (R.L. Baire, 1899)

Ist  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  eine Folge abgeschlossener Teilmengen s.d.

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = X,$$

so hat mindestens ein  $F_{n_0}$  einen inneren Punkt.

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H–B  
Geometrische  
Versionen von H–B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- ▶ Mindestens ein  $F_{n_0}$  hat einen inneren Punkt, **denn sonst**: hätte jedes  $F_n$  keinen inneren Punkt, so wäre  $X \setminus F_n \neq \emptyset \forall n$ .
- ▶ Für alle  $k \in \mathbb{N}$  und alle offene Mengen  $O \neq \emptyset$  würde es dann  $x \in X$  und  $\epsilon > 0$  geben mit

$$\overline{B_\epsilon(x)} \subset O \setminus F_k,$$

da  $O \not\subset F_k$ .

- ▶ So könnte man

$$x_1 \in X, \quad \epsilon_1 \in (0, 1)$$

wählen, s.d.

$$B_{\epsilon_1}(x_1) \subset X \setminus F_1.$$

Delio Mugnolo

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**

Analytische  
Versionen von H–B  
Geometrische  
Versionen von H–B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- ▶ So könnte man

$$x_2 \in X, \quad \epsilon_2 \in (0, 1/2)$$

wählen, s.d.

$$B_{\epsilon_2}(x_2) \subset B_{\frac{\epsilon_1}{2}}(x_1) \setminus F_2.$$

- ▶ ...

- ▶ So könnte man

$$x_n \in X, \quad \epsilon_n \in \left(0, \frac{1}{\epsilon^n}\right)$$

wählen, s.d.

$$B_{\epsilon_n}(x_n) \subset B_{\frac{\epsilon_{n-1}}{2}}(x_{n-1}) \setminus F_n.$$

Delio Mugnolo

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**Analytische  
Versionen von H–B  
Geometrische  
Versionen von H–B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- Da

$$d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon_{n-1}}{2} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

wäre  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =: x$ .

- Dann wäre

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = d(x_n, x) < \frac{\epsilon_n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

also  $x \notin F_n \forall n$  wegen  $B_{\epsilon_n}(x_n) \subset X \setminus F_n$ .

- Somit wäre  $x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = X$ . ⚡

Delio Mugnolo

$(X, d)$  vollständiger metrischer Raum

**Korollar.**

*Ist  $(O_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  Folge offener und dichter Mengen, so ist auch*

$$\bigcap O_n$$

*dicht in  $X$ .*

Sei  $F_n := X \setminus O_n$ . Wende den Satz von Baire auf  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  an.

[ Details: **ÜA!** ]

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$X$  metrischer Raum

- ▶  $U \subset X$  heißt **nirgends dicht**, falls  $\bar{U}$  keinen inneren Punkt hat.
- ▶ Jedes  $A \subset X$ , s.d.

$$A = \bigcup U_n$$

für eine Folge  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $U_n \subset X$  nirgends dicht  $\forall n$ , heißt **von 1. Baire-Kategorie**.

- ▶ Jedes  $A \subset X$ , das nicht von 1. Baire-Kategorie ist, heißt **von 2. Baire-Kategorie**.

Also besagt der Satz von Baire:

*Jeder nichttriviale, vollständige metrische Raum ist von 2. Baire-Kategorie.*

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Delio Mugnolo

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- ▶  $\mathbb{Q}$  ist von 1. Baire-Kategorie in  $\mathbb{R}$ .
- ▶  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  und sogar die Menge der transzendenten Zahlen sind von 2. Baire-Kategorie in  $\mathbb{R}$ .
- ▶  $\mathbb{R}$  ist von 1. Baire-Kategorie in  $\mathbb{C}$ .
- ▶ Die Cantor-Menge ist von 2. Baire-Kategorie in  $\mathbb{R}$ .

Allgemeiner:

- ▶ Jeder vollständige metrische Raum ohne isolierte Punkte ist überabzählbar.

(Denn eine Teilmenge  $\{x\}$  kann erst dann einen inneren Punkt haben, wenn  $x \in X$  isoliert ist).

# Folgerung des Satzes von Baire – #1

## Satz.

*Jede Basis eines unendlichdimensionalen Banachraumes ist überabzählbar.*

## Beweis.

- ▶ Gäbe es eine Basis  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eines unendlichdimensionalen Banachraumes  $X$ , so könnte man  $X_n := \langle x_1, \dots, x_n \rangle$  betrachten.
- ▶  $X_n$  abgeschlossen weil  $\dim X_n < \infty, \forall n$ .
- ▶  $X = \bigcup X_n$ .
- ▶ Also würde ein  $X_n$  einen inneren Punkt enthalten.
- ▶ Enthält ein Unterraum einen inneren Punkt, so ist er bereits der ganze Raum.
- ▶ Also würde  $X = X_n$  und somit  $\dim X = \dim X_n < \infty$ . ⚡



Delio Mugnolo

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume**Satz.**

Es gibt  $f \in C[0, 1]$ , s.d.  $f$  nirgendwo differenzierbar ist.

Sei

$$O_n := \left( g \in C[0, 1] : \sup_{0 < |h| < \frac{1}{n}} \left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right| > n \quad \forall x \in [0, 1] \right).$$

Dann ist jedes  $O_n$  offen und dicht in  $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$  und somit ist auch  $\bigcap O_n$  dicht.

[ Details: **ÜA!** ]

$X, Y$  Vektorräume

Definition.

- ▶ Eine Abbildung  $T : X \rightarrow Y$  heißt **Operator**.
- ▶ Sein Definitionsbereich  $D(T)$  braucht **nicht** ganz  $X$  zu sein.
- ▶ Ein Operator heißt **linear**, falls

$$T(x + y) = Tx + Ty \quad \text{und} \quad T(\lambda x) = \lambda Tx$$

$$\forall x, y \in D(T), \lambda \in \mathbb{K}.$$

# Beschränkte Operatoren

$X, Y$  normierte Räume

## Definition.

- ▶ Ein linearer Operator  $T : X \rightarrow Y$  heißt **beschränkt**, falls

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y < \infty.$$

(Es gilt  $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \equiv \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} < \infty$  und insb.  $D(T) = X$ ).

- ▶ Der Raum der beschränkten linearen Operatoren  $T : X \rightarrow Y$  ist  $\mathcal{L}(X, Y)$ .
- ▶ Ist  $Y = \mathbb{K}$ , so heißt  $T \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$  **beschränktes lineares Funktional**.
- ▶  $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$  und  $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$

Delio Mugnolo

$X, Y, Z$  normierte Räume

**Lemma.**

*Sind  $T \in \mathcal{L}(X, Y), S \in \mathcal{L}(Y, Z)$ , so ist  $ST \in \mathcal{L}(X, Z)$  und  $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$ .*

**Beweis.**

- ▶  $\|Tx\|_Y \leq \|T\| \|x\|_X \quad \forall x \in X$
- ▶  $\|STx\|_Z \leq \|S\| \|Tx\|_Y \leq \|S\| \|T\| \|x\|_X \quad \forall x \in X$

□

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$X, Y$  normierte Räume

Lemma.

Ist  $T : X \rightarrow Y$  linear, so sind folgende Aussagen äquivalent.

- (a)  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ .
- (b)  $T$  ist Lipschitz-stetig.
- (c)  $T$  ist stetig in  $0 \in X$ .

Beweis.

- ▶ “(a)  $\Rightarrow$  (b)” Ist  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ , so  $\|Tx - Ty\| \leq \|T\| \|x - y\|$   
 $\forall x, y \in X$ .
- ▶ “(c)  $\Rightarrow$  (a)” Ist  $T$  stetig in  $0$ , so

$$\exists \delta > 0 \text{ s.d. } \|y\| \leq \delta \Rightarrow \|Ty\| \leq 1,$$

- ▶  $\Rightarrow \|Tx\| = \frac{\|x\|}{\delta} \left\| T \left( \frac{\delta}{\|x\|} x \right) \right\| \leq \frac{1}{\delta} \|x\|.$



# $X, Y$ normierte Räume

## Satz.

- ▶  $\mathcal{L}(X, Y)$  ist ein normierter Raum bzgl. der Operatornorm  $\| \cdot \|_{\mathcal{L}(X, Y)}$ .
- ▶ Ist  $Y$  ein Banachraum, so ist auch  $\mathcal{L}(X, Y)$  ein Banachraum.
- ▶ Insbesondere ist  $X'$  immer ein Banachraum.

## Beweis.

- ▶ Ist  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge, so ist auch  $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$  eine Cauchy-Folge  $\forall x \in X$ .
- ▶ Ist  $Y$  Banachraum, so  $\exists y = \lim T_n x =: Tx$ .
- ▶ Dadurch definiert man  $T : X \rightarrow Y$ .
- ▶  $T$  ist glm. Grenzwert von stetigen linearen Operatoren, also ist  $T$  linear und stetig.



$X, Y$  normierte Räume

Definition.

- ▶  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  heißt **Isomorphismus**, falls er bijektiv ist mit  $T^{-1}$  beschränkt

d.h., wenn  $\exists S \in \mathcal{L}(Y, X)$  mit  $S \circ T = T \circ S = \text{Id}$ .

- ▶  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  heißt **Isometrie** falls

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

- ▶  $X, Y$  heißen **isomorph**, falls  $\exists T : X \rightarrow Y$  Isomorphismus.
- ▶  $X, Y$  heißen **isometrisch**, falls  $\exists T : X \rightarrow Y$  isometrisch.

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$X, Y$  normierte Räume,  $T : X \rightarrow Y$  linear.

- ▶ Der **Kern** und das **Bild** von  $T$  sind

$$\ker T := \{x \in X : Tx = 0\}$$

bzw.

$$\operatorname{Rg} T := \{Tx \in Y : x \in X\}.$$

- ▶  $T$  ist injektiv  $\Leftrightarrow \ker T = \{0\}$ .
- ▶ Ist  $T$  beschränkt, so ist  $\ker T$  abgeschlossen.

$X, Y$  normierte Räume

## Beispiele.

- ▶  $0 : X \ni x \mapsto 0 \in Y$  ist ein beschränkter linearer Operator mit  $\|0\| = 0$ .
- ▶  $\text{Id} : X \ni x \mapsto x \in X$  ist ein beschränkter linearer Operator, die **Identität**.  
 $\ker \text{Id} = \{0\}$  und  $\text{Rg Id} = X$ .  $X \neq \{0\} \Rightarrow \|\text{Id}\| = 1$ .
- ▶ Ist  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  ein Isomorphismus, so ist

$$1 = \|\text{Id}\| = \|TT^{-1}\| \leq \|T\| \|T^{-1}\|,$$

also gilt immer

$$\|T\|^{-1} \leq \|T^{-1}\|.$$

## Banach-, normierte und metrische Räume

Analytische Versionen von H-B  
 Geometrische Versionen von H-B

## Funktionale

Reflexive Räume und schwache Topologien

Intermezzo: Hilberträume

## Kompaktheit

Allgemeine spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte Operatoren und Sobolev-Räume

# Multiplikationsoperatoren

## Beispiel.

$K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt,  $q \in C(K)$

(oder allgemeiner,  $K \subset \mathbb{R}^n$  und  $q \in C_b(K)$ )

$$T : C(K) \ni f \mapsto q \cdot f \in C(K)$$

(oder allgemeiner,  $T : C_b(K) \ni f \mapsto q \cdot f \in C_b(K)$ )

definiert einen beschränkten linearen Operator mit

$$\|T\| = \|q\|_\infty.$$

- ▶  $\|Tf\|_\infty = \|q \cdot f\|_\infty \leq \|q\|_\infty \|f\|_\infty$
- ▶  $\|Tf\|_\infty = \|q\|_\infty$ , falls  $f \equiv 1$
- ▶  $T$  Isomorphismus  $\Leftrightarrow q(x) > 0$  für alle  $x \in K$
- ▶ Allgemeiner,  $T$  Isomorphismus  $\Leftrightarrow q(x) \geq q_0 > 0$  für alle  $x \in K$ , falls  $K$  nichtkompakt

Insbesondere, falls  $K \subset \mathbb{K}$

Beispiel.

$$R : C(K) \ni f \mapsto \text{id} \cdot f \in C(K)$$

*definiert einen beschränkten linearen Operator mit*

$$\|R\| = \sup\{|x| : x \in K\}.$$

# Ableitungsoperator (Impulsoperator)

Beispiel.

$$S : C(\mathbb{R}) \ni f \mapsto f' \in C(\mathbb{R})$$

definiert einen linearen Operator (mit  $D(S) = C^1(\mathbb{R})$ ), der unbeschränkt ist.

► Sei  $f_n \in C^1(\mathbb{R})$  mit

$$f_n(x) := \begin{cases} nx & \text{falls } |x| \leq \frac{1}{2n}, \\ 1 & \text{falls } |x| \geq \frac{1}{n} \end{cases},$$

und  $|f_n(x)| \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$ .

►  $\|Sf_n\|_\infty = n \rightarrow \infty$ , obwohl  $\|f_n\|_\infty \equiv 1$ .

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

## Beispiele.

- ▶ *Der rechte Shiftoperator*

$$J : \ell^p(\mathbb{N}) \ni (x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots) \in \ell^p(\mathbb{N})$$

*ist eine Isometrie (und ist somit injektiv), aber kein Isomorphismus.*

- ▶ *Der linke Shiftoperator*

$$K : \ell^p(\mathbb{N}) \ni (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, \dots) \in \ell^p(\mathbb{N})$$

*ist weder eine Isometrie noch ein Isomorphismus – er ist aber surjektiv.*

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**

Analytische  
Versionen von H–B  
Geometrische  
Versionen von H–B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

## Beispiele.

- ▶  $(c, \|\cdot\|_\infty)$  und  $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$  sind isomorph. [ **ÜA** ]
- ▶ Seien  $\|\cdot\|$  und  $|\cdot|$  zwei Normen auf einem Vektorraum  $X$ . Die Identität ist genau dann ein Isomorphismus von  $(X, \|\cdot\|)$  nach  $(X, |\cdot|)$ , wenn die Normen äquivalent sind. Sie ist genau dann eine Isometrie, wenn die Normen gleich sind.

# Stetige Erweiterung von Operatoren

$X, Y$  normierte Räume,  $Y$  vollständig,  $E \subset X$  dichter Unterraum

**Satz.**

Jedes  $T \in \mathcal{L}(E, Y)$  hat eine eindeutige Fortsetzung  $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X, Y)$ .

**Beweis.**

- ▶ Sei  $x \in X$  und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$  mit  $\lim x_n = x$
- ▶  $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist Cauchy wegen der Beschränktheit von  $T$  auf  $E$
- ▶  $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, etwa gegen  $\tilde{T}x := \lim Tx_n$
- ▶  $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X, Y)$

□

Delio Mugnolo

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume $X$  Banachraum

Lemma.

Ist  $T \in \mathcal{L}(X)$  mit  $\|T\| < 1$ , so ist  $\text{Id} - T$  ein Isomorphismus  
und

$$(\text{Id} - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \quad \text{und} \quad \|(\text{Id} - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Delio Mugnolo

## Banach-, normierte und metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

## Funktionale

## Reflexive Räume und schwache Topologien

## Intermezzo: Hilberträume

## Kompaktheit

## Allgemeine spektrale Theorie

## $L^p$ -Räume

## Unbeschränkte Operatoren und Sobolev-Räume

- ▶  $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1-\|T\|}$
- ▶  $\mathcal{L}(X)$  ist Banachraum  $\Rightarrow$   
 $\sum_{n=0}^m T^n =: S_m \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} T^n =: S \in \mathcal{L}(X)$
- ▶  $S_m(\text{Id} - T) = S_m - S_m T = S_m - T \sum_{n=0}^m T^n = S_m - \sum_{n=1}^{m+1} T^n =$   
 $S_m - (S_{m+1} - \text{Id}) = \text{Id} - T^{m+1}$
- ▶  $S(\text{Id} - T) = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m(\text{Id} - T) = \text{Id} - \lim_{m \rightarrow \infty} T^{m+1} = \text{Id}$ , da  
 $\lim_{m \rightarrow \infty} \|T^{m+1}\| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|T\|^{m+1} = 0$  wegen  $\|T\| < 1$
- ▶ Ähnlich:  $(\text{Id} - T)S = \text{Id}$
- ▶  $(\text{Id} - T)^{-1} = S = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$

# Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

$J$  Menge,  $X$  Banachraum,  $Y$  normierter Raum

Theorem. (S. Banach 1920, T.H. Hildebrandt 1923)

Es sei  $(T_j)_{j \in J} \subset \mathcal{L}(X, Y)$  mit

$$\sup_{j \in J} \|T_j x\|_Y < \infty \quad \forall x \in X.$$

Dann

$$\sup_{j \in J} \|T_j\| < \infty.$$

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Delio Mugnolo

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

## Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

## Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- ▶  $X_n := \{x \in X : \sup_{j \in J} \|T_j x\|_Y \leq n\}, n \in \mathbb{N}$
- ▶  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$
- ▶ Baire  $\Rightarrow \exists X_{n_0} \exists y \in X_{n_0} \exists \delta > 0$  s.d.  $B_\delta(y) \subset X_{n_0}$
- ▶ Sei  $z \in X$  s.d.  $\|z\|_X = \|(z + y) - y\|_X < \delta$
- ▶  $y + z \in B_\delta(y) \subset X_{n_0}$ , deshalb

$$\|T_j z\|_Y \leq \|T_j(y + z)\|_Y + \|T_j y\|_Y \leq 2n_0 \quad \forall j \in J$$

- ▶  $\|T_j\| \leq \frac{2n_0}{\delta} \quad \forall j \in J$

$X$  Banachraum,  $Y$  normierter Raum

**Korollar.**

Es sei  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$  s.d.  $\exists Tx := \lim T_n x \quad \forall x \in X$ .

Dann  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  und

$$\|T\| \leq \liminf \|T_n\| \leq \sup \|T_n\| < \infty.$$

**Beweis.**

- ▶ Linearität von  $T$  klar
- ▶ Es gilt  $\sup \|T_n x\| < \infty$  (jede konvergente Folge ist beschränkt)
- ▶ Prinzip glm. beschr.  $\Rightarrow \liminf \|T_n\| \leq \sup \|T_n\| < \infty$
- ▶  $\Rightarrow \|Tx\| = \lim \|T_n x\| = \liminf \|T_n x\| \leq \liminf \|T_n\| \|x\|$

□

# Satz von Banach–Steinhaus

$X$  Banachraum,  $Y$  normierter Raum

Theorem. (S. Banach & H. Steinhaus 1929)

Es sei  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ . Folgende Aussagen sind äquivalent.

- (a)  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert stark, d.h.,  $\exists T \in \mathcal{L}(X, Y)$  mit  $\lim T_n x = T x \forall x \in X$ .
- (b)  $\exists M > 0$  s.d.  $\|T_n\| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$  und  $\exists D \subset X, \overline{D} = X$ , s.d.  $\exists \lim T_n x \forall x \in D$ .

“(a)  $\Rightarrow$  (b)” folgt aus dem letzten Korollar.

Beweis von “(b)  $\Rightarrow$  (a)”

Es seien  $x \in X$ ,  $\epsilon > 0$ . Wähle

- ▶  $z \in D$  mit  $\|x - z\| < \frac{\epsilon}{3M}$
- ▶  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\|T_n z - T_m z\| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n, m \geq n_0$ .

Somit gilt

$$\begin{aligned} \|T_n x - T_m x\| &\leq \|T_n x - T_n z\| + \|T_n z - T_m z\| + \|T_m z - T_m x\| \\ &\leq \|T_n\| \|x - z\| + \frac{\epsilon}{3} + \|T_m\| \|x - z\| \\ &\leq M \frac{\epsilon}{3M} + \frac{\epsilon}{3} + M \frac{\epsilon}{3M}. \end{aligned}$$

# Satz über die offene Abbildung

$X, Y$  Banachräume

Theorem. (S. Banach 1929)

Ist  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  surjektiv, dann ist  $T$  ist offen

d.h.,  $T(G)$  ist offen  $\forall G \subset X$  offen.

Beweisskizze:

- ▶  $\forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0$  s.d.  $B_{2\epsilon}(0) \subset \overline{T(B_\delta(0))}$
- ▶  $\forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0$  s.d.  $B_\epsilon(0) \subset T(B_\delta(0))$
- ▶  $\forall G \subset X$  offen  $\forall y \in T(G) \exists \epsilon > 0$  s.d.  $B_\epsilon(y) \subset T(G)$ .

Es sei  $\delta > 0$

- ▶  $Y_n := n\overline{T(B_\delta(0))} := \{ny \in Y : y \in \overline{T(B_\delta(0))}\}$
- ▶  $T$  surjektiv  $\Rightarrow Y = \bigcup Y_n$ .
- ▶ Baire  $\Rightarrow \exists Y_{n_0}$  mit einem inneren Punkt  $\Rightarrow \overline{T(B_\delta(0))}$  hat einen inneren Punkt  $y$
- ▶  $\exists y \in Y \exists \epsilon > 0$  s.d.  $B_{4\epsilon}(y) \subset \overline{T(B_\delta(0))}$ .
- ▶  $y, -y \in \overline{T(B_\delta(0))}$
- ▶  $B_{4\epsilon}(0) \subset \overline{T(B_\delta(0))} + \overline{T(B_\delta(0))} := \{y_1 + y_2 \in Y : y_1, y_2 \in \overline{T(B_\delta(0))}\}$
- ▶  $\overline{T(B_\delta(0))}$  konvex (da  $T$  linear)  $\Rightarrow$   
 $\overline{T(B_\delta(0))} + \overline{T(B_\delta(0))} = 2\overline{T(B_\delta(0))}$

Fazit:  $\forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0$  s.d.  $B_{2\epsilon}(0) \subset \overline{T(B_\delta(0))}$

$\forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0$  s.d.  $B_{2\epsilon}(0) \subset \overline{T(B_\delta(0))}$

Es seien  $z \in B_\epsilon(0)$  und  $\delta > 0$ , dann:

- ▶ für das obige  $\epsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in X$  s.d.  $\|x_n\| < \frac{\delta}{2^n}$  und
$$\left\| z - T \sum_{k=1}^n x_k \right\| < \frac{\epsilon}{2^n}$$
- ▶  $\sum_{k \in \mathbb{N}} x_k$  ist Cauchy, also konvergiert
- ▶ für  $x := \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k$  gilt  $\|x\|_X < \delta$  und  $z = Tx$  (da  $T$  stetig)

Fazit:  $\forall \delta > 0 \exists \epsilon > 0$  s.d.  $B_\epsilon(0) \subset T(B_\delta(0))$

Schließlich: es seien  $G \subset X$  offen und  $y \in T(G)$ , dann

- ▶ wähle  $x \in X$  s.d.  $y = Tx$
- ▶  $\exists \delta > 0$  s.d.  $B_\delta(x) \subset G$
- ▶  $\exists \epsilon > 0$  s.d.  $B_\epsilon(0) \subset TB_\delta(0)$
- ▶  $B_\epsilon(y) = y + B_\epsilon(0) \subset y + TB_\delta(0) = Tx + TB_\delta(0) = TB_\delta(x) \subset T(G)$ .

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# Satz der beschränkten Inverse

$X, Y$  Banachräume

Korollar. (S. Banach 1929)

*Ist  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  bijektiv, dann ist  $T$  ein Isomorphismus.*

Beweis.

- ▶ Linearität von  $T^{-1}$ : klar
- ▶ es sei  $y \in Y$  s.d.  $y = Tx$
- ▶ bekannt:  $\exists \epsilon > 0$  s.d.  $B_\epsilon(0) \subset T(B_1(0))$
- ▶ also:  $\|Tx\|_Y \leq \epsilon \Rightarrow \|x\|_X \leq 1$
- ▶  $\Rightarrow \|y\|_Y \leq \epsilon \Rightarrow \|T^{-1}y\|_X \leq 1$
- ▶ Linearität  $\Rightarrow T^{-1}$  ist beschränkt

□

# Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{K}^n$

$X$  Banachraum

Theorem.

*Ist  $\dim X < \infty$ , so sind je zwei Normen  $\|\cdot\|$  und  $|\cdot|$  auf  $X$  äquivalent.*

Anmerkung.

*Gilt auch wenn  $X$  nicht als vollständig angenommen wird: Also ist  $X$  bzgl. jeder Norm ein Banachraum.*

Delio Mugnolo

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- ▶ Sei  $\Phi : \mathbb{K}^n \ni x \mapsto \sum_{j=1}^n x_j e_j \in X$ , wobei  $\{e_1, \dots, e_n\} \subset X$  eine Basis.
- ▶  $\Phi$  ist bijektiv.
- ▶ Ist  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $X$  und  $\|\cdot\|_2$  die euklidische Norm auf  $\mathbb{K}^n$ , so gilt

$$\|\Phi(x)\| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \|e_k\| \stackrel{C-S}{\leq} \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^n \|e_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} =: M \|x\|_2.$$

Somit ist  $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, X)$ .

- ▶ Satz der beschr. Inv.  $\Rightarrow \Phi^{-1}$  beschränkt.
- ▶  $\|y\| = \|\Phi x\| \leq M' \|x\|_2 \leq \frac{M'}{m} \|y\| \leq \frac{MM'}{mm'} \|y\|$ .

$X, Y$  normierte Räume

**Korollar.**

*Ist  $\dim X < \infty$ , so ist jedes lineare  $T : X \rightarrow Y$  beschränkt.*

**Beweis.**

- ▶ Bzgl. dem Isomorphismus

$$\Phi : \mathbb{K}^n \ni x \mapsto \sum_{j=1}^n x_j e_j \in X$$

gilt

$$\|T\Phi(x)\| = \left\| \sum_{k=1}^n x_k T e_k \right\| \stackrel{C-S}{\leq} \|x\|_2 \|T e\|_2.$$

- ▶  $\Rightarrow T \circ \Phi$  ist stetig und somit auch  $T = T \circ \Phi \circ \Phi^{-1}$ .

□

# Banachscher Fixpunktsatz

$(X, d)$  vollständiger metrischer Raum

Definition.

$T : X \rightarrow X$  heißt **Kontraktion**, falls  $\exists \alpha \in (0, 1)$  s.d.

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

( $T$  ist dann auch stetig).

Theorem. (S. Banach 1922)

Jede Kontraktion hat genau einen Fixpunkt.

Korollar.

Es sei  $T : X \rightarrow X$  stetig. Ist  $T^k$  Kontraktion für  $k \in \mathbb{N}$ , so hat  $T$  genau einen Fixpunkt.

[ ÜA ]

- ▶ Sei  $x_0 \in X$  (beliebig) und  $x_k := T^k x_0$ .
- ▶  $d(x_n, x_m) = d(T^n x_0, T^m x_0) \leq \alpha d(T^{n-1} x_0, T^{m-1} x_0) \leq \dots \leq \alpha^n d(x_0, T^{m-n} x_0)$
- ▶  $d(x_0, T^{m-n} x_0) \leq d(x_0, T x_0) + d(T x_0, T^2 x_0) + \dots + d(T^{m-n-1} x_0, T^{m-n} x_0) \leq \sum_{k=0}^{m-n-1} \alpha^k d(x_0, T x_0) < \frac{1}{1-\alpha} d(x_0, T x_0)$
- ▶  $d(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, T x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
- ▶  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge.
- ▶ Für  $x = \lim x_n$  gilt

$$T x = \lim_n T x_n = \lim_n x_{n+1} = x.$$

- ▶ Gilt  $T y = y$  für einen  $y \in X$ , so ist

$$d(x, y) = d(T x, T y) \leq \alpha d(x, y)$$

also  $d(x, y) = 0$ .

Delio Mugnolo

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# Eine Folgerung des Banachschen Fixpunktsatzes

$X, Y$  Banachräume,  $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$

**Korollar.**

*Ist  $T$  Isomorphismus und  $\|S\|^{-1} > \|T^{-1}\|$ , so ist auch  $S + T$  Isomorphismus.*

**Beweis.**

- ▶ Sei  $y \in Y$  und  $C := T^{-1}y - T^{-1}S$ .
- ▶  $C$  ist eine (nichtlineare) Kontraktion.
- ▶  $\exists |x \in X$  s.d.  $Cx = x$ , d.h.  $x = T^{-1}y - T^{-1}Sx$ .
- ▶  $Tx + Sx = y$  hat eine genau eine Lösung, also ist  $T + S$  bijektiv.
- ▶ Satz beschr. Inv.  $\Rightarrow T + S$  Isomorphismus.

□

**Banach-,  
normierte und  
metrische Räume**

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# Zur Erinnerung

$X$  normierter Raum, dann ist  $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$  sein **Dual**

Notation:  $\langle f, x \rangle := f(x) \quad \forall x \in X, \forall f \in X'$

$X'$  Banachraum bzgl. der Norm

$$\|f\|_{X'} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\langle f, x \rangle| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \langle f, x \rangle$$

Beispiel.

- ▶  $C[0, 1] \ni u \mapsto \int_0^1 u(s) ds \in \mathbb{K}$
- ▶  $c \ni (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lim_n x_n \in \mathbb{K}$

Was sind ihre Normen? [ **ÜA** ]

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Eine halbgeordnete Menge heißt **induktiv**, falls jede Kette (d.h. jede total geordnete Teilmenge) eine obere Schranke hat.

Lemma. (K. Kuratowski 1922, M. Zorn 1935)

*Jede nichtleere halbgeordnete induktive Menge enthält mindestens ein maximales Element.*

# Der Satz von Hahn-Banach

$X$  Vektorraum auf  $\mathbb{R}$

Theorem. (E. Helly 1912, H. Hahn 1927, S. Banach 1932)

Sei  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  *homogen* und *konvex*, d.h.

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \text{bzw.} \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y)$$

$\forall x, y \in X, \forall \lambda > 0.$

Sei  $Y$  Unterraum von  $X$  und  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  linear s.d.

$$g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in Y.$$

Dann  $\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$  lineare Fortsetzung von  $g$  s.d.

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$

# Beweis – 1

- ▶ Sei  $P$  die Menge aller linearen Abbildungen  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ , dessen Definitionsbereich  $D(h)$   $Y$  enthält und in  $X$  enthalten ist und welche  $g$  fortsetzen und  $h(x) \leq p(x) \forall x \in D(h)$  erfüllen.
- ▶  $P$  ist halbgeordnet durch

$$h_1 \leq h_2 \quad :\Leftrightarrow \quad D(h_1) \subset D(h_2) \text{ \& } h_2 \text{ ist Fortsetzung von } h_1.$$

- ▶  $P \neq \emptyset$ , da  $g \in P$ .
- ▶ Sei  $Q \subset P$  eine Kette, etwa  $Q = (h_i)_{i \in I}$  und sei  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$D(h) \quad := \quad \bigcup_{i \in I} D(h_i)$$
$$h(x) \quad := \quad h_i(x) \quad \text{falls } \exists i \in I \text{ s.d. } x \in D(h_i).$$

- ▶  $h$  ist wohl definiert: falls  $x \in D(h_1) \cap D(h_2)$ , entweder  $D(h_1) \subset D(h_2)$  oder  $D(h_2) \subset D(h_1)$  und in beiden Fälle  $h_1(x) = h_2(x)$ .
- ▶  $h$  ist ein maximales Element für  $Q$ .
- ▶  $\Rightarrow P$  ist induktiv.
- ▶ Zorn  $\Rightarrow \exists (f, D(f))$  maximales Element für  $P$ .

## Beweis – 2

- ▶ Es bleibt zu zeigen, dass  $D(f) = X$ . **Denn sonst:** Gäbe es  $x_0 \in X \setminus D(f)$ , dann sei  $j_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , definiert durch

$$\begin{aligned} D(j_\alpha) &:= D(f) + \mathbb{R}x_0, \\ j_\alpha(x + tx_0) &:= f(x) + t\alpha. \end{aligned}$$

- ▶  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ :  $D(j_\alpha)$  ist ein Unterraum von  $X$ , der  $Y$  enthält und  $j_\alpha$  ist linear.
- ▶  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ :  $j_\alpha$  ist Fortsetzung von  $g$ , da

$$j_\alpha(x) = j_\alpha(x + 0x_0) = f(x) = g(x) \quad \forall x \in Y.$$

- ▶ Suche  $\alpha \in \mathbb{R}$  s.d.  $j_\alpha \in P$ , d.h., s.d.

$$j_\alpha(x + tx_0) = f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0) \quad \forall x \in D(f), t \in \mathbb{R},$$

d.h. (Homogenität von  $p!$ ), s.d.

$$\begin{aligned} f(x) + \alpha &\leq p(x + x_0) \quad \text{und} \\ f(x) - \alpha &\leq p(x - x_0) \end{aligned}$$

$\forall x \in D(f)$ , d.h., s.d.

$$\sup_{y \in D(f)} (f(y) - p(y - x_0)) \leq \alpha \leq \inf_{x \in D(f)} (p(x + x_0) - f(x))$$

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- ▶ Tatsächlich  $\exists \alpha \in \mathbb{R}$  s.d.

$$\sup_{y \in D(f)} (f(y) - p(y - x_0)) \leq \alpha \leq \inf_{x \in D(f)} (p(x + x_0) - f(x))$$

denn (da  $p$  konvex)

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0)$$

und somit

$$f(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x)$$

$\forall x, y \in D(f)$ .

- ▶ Somit wäre  $f \leq j_\alpha$  mit  $j_\alpha \in P$  aber  $f \neq j_\alpha$ , obwohl  $f$  maximales Element von  $P$  ist. ⚡
- ▶ Also tatsächlich  $D(f) = X$ .

# Der Satz von Hahn-Banach - allgemeine Version

$X$  Vektorraum auf  $\mathbb{K}$

Theorem. (F. Bohnenblust & A. Sobczyk 1938)

Sei  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$   $|\cdot|$ -homogen und konvex, d.h.

$$p(\lambda x) = |\lambda|p(x) \quad \text{bzw.} \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y)$$

$\forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ .

Sei  $Y$  Unterraum von  $X$  und  $g : Y \rightarrow \mathbb{K}$  linear s.d.

$$|g(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in Y.$$

Dann  $\exists f : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineare Fortsetzung von  $g$  s.d.

$$|f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- ▶ Ist  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , so gilt

$$g(x) \leq |g(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in Y.$$

- ▶ Hahn-Banach  $\Rightarrow \exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$  s.d.

$$f(x) \leq p(x), \quad x \in X.$$

- ▶ Weiter gilt wegen  $|\cdot|$ -Homogenität

$$-f(x) = f(-x) \leq p(-x) = |-1|p(x) = p(x) \quad \forall x \in X.$$

- ▶ Also  $-p(x) \leq f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X.$

## Beweis - 2

- ▶ Betrachte  $Y, X$  als Vektorräume auf  $\mathbb{R}$ :  $Y_{\mathbb{R}}, X_{\mathbb{R}}$ .
- ▶ Ist  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , so gilt

$$g(x) = g_1(x) + ig_2(x) \quad \forall x \in Y_{\mathbb{R}},$$

wobei  $g_1, g_2 : Y_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$  linear bzgl.  $Y_{\mathbb{R}}$  sind.

- ▶ Es gilt

$$g_i(x) \leq |g(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in Y_{\mathbb{R}}.$$

- ▶ Hahn-Banach  $\Rightarrow \exists f_1 : X_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$  Fortsetzung von  $g_1$  s.d.

$$f_1(x) \leq p(x), \quad x \in X_{\mathbb{R}}.$$

- ▶  $ig = g_1(i\cdot) + ig_2(i\cdot)$ , da

$$i(g_1(x) + ig_2(x)) = ig(x) = g(ix) = g_1(ix) + ig_2(ix) \quad \forall x \in X_{\mathbb{R}}.$$

- ▶ Die Realteile stimmen überein  $\Rightarrow g_1(i\cdot) = -g_2$

- ▶ Sei

$$f(x) := f_1(x) - if_1(ix) \quad \forall x \in X.$$

- ▶  $f_1$  Erweiterung von  $g_1$  und  $g_1(i\cdot) = -g_2 \Rightarrow f$  Erweiterung von  $g$ .

Noch z.z.: (1)  $f$  ist linear auf  $X$  und (2)  $|f(x)| \leq p(x) \forall x \in X$ .

(1)  $f((a + ib)x) = (a + ib)f(x)$ : wegen  $\mathbb{R}$ -Linearität von  $f_1$  [ ÜA ]

(2.a) Ist  $x$  s.d.  $f(x) = 0$ , so gilt (2) da

$$\begin{aligned} 2p(x) &= p(x) + |-1|p(x) = p(x) + p(-x) \\ &\geq p(x - x) = p(0x) = 0p(x) = 0 \end{aligned}$$

und somit  $p(x) \geq 0 = f(x) \forall x$  wegen  $|\cdot|$ -Homogenität und Konvexität von  $p$ .

(2.b) Ist  $x$  s.d.  $f(x) \neq 0$ , also  $f(x) = |f(x)|e^{i\theta}$  und  $|f(x)| = f(x)e^{-i\theta} = f(e^{-i\theta}x) \in \mathbb{R}$ , so gilt

$$|f(x)| = f(e^{-i\theta}x) = f_1(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x)$$

$\forall x \in X$ .

# Folgerungen von Hahn–Banach - 1

$X$  normierter Raum

Korollar.

Sind  $Y$  ein normierter Unterraum von  $X$  (bzgl. der von  $X$  induzierten Norm!) und  $g \in Y'$ , so  $\exists f \in X'$  s.d.

- ▶  $f$  ist Fortsetzung von  $g$
- ▶  $\|f\|_{X'} = \|g\|_{Y'}$

Beweis.

- ▶  $p(x) := \|g\|_{Y'} \|x\|_X$ .
- ▶  $p$  ist homogen und konvex und

$$g(x) \leq \|g\|_{Y'} \|x\|_X = p(x) \quad \forall x \in Y.$$

- ▶ Wende Hahn–Banach an.



Im vorigen Satz ist es wesentlich, dass man  $Y$  mit  $\|\cdot\|_X$  versieht.

Betrachte z.B.  $X := C[0, 1]$  und  $Y := C^1[0, 1]$ . Da  $\delta' : f \mapsto f'(0)$  kein stetiges lineares Funktional auf  $X$  ist, kann auch nicht  $\delta' \in Y'$  gelten.

Das ist tatsächlich der Fall, wenn man  $Y = C^1[0, 1]$  als normierter Raum mit  $\|\cdot\|_\infty$  versieht.

Dass  $Y$  selber ein normierter Raum ist (bzgl. der Norm  $\|f\|_Y := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ ) spielt hier keine Rolle.

# Folgerungen von Hahn–Banach - 2

$X$  normierter Raum

**Korollar.**

Ist  $x_0 \in X$ , so  $\exists f \in X'$  s.d.

$$\|f\|_{X'} = \|x_0\|_X \quad \text{und} \quad \langle f, x_0 \rangle = \|x_0\|^2.$$

(Die Menge  $J(x) \subset X'$  solcher  $f$  heißt **Dualitätsmenge**).

**Beweis.**

- ▶ Sei  $Y := \mathbb{R}x_0$ ,  $g(tx_0) := t\|x_0\|_X^2$ .
- ▶ Dann gilt  $\|g\|_{Y'} = \|x_0\|_X$ .
- ▶ Wende das vorige Korollar an.

□

## Folgerungen von Hahn–Banach - 3

 $X$  normierter Raum

Korollar.

Ist  $x \in X$ , so gilt

$$\|x\|_X = \sup_{\|f\|_{X'} \leq 1} |\langle f, x \rangle| = \max_{\|f\|_{X'} \leq 1} |\langle f, x \rangle|.$$

Beweis.

- ▶  $x = 0$ : klar.
- ▶  $x \neq 0$ :  $|\langle f, x \rangle| \leq \|f\|_{X'} \|x\|_X \quad \forall f \in X'$  und somit

$$\sup_{\|f\|_{X'} \leq 1} |\langle f, x \rangle| \leq \|x\|_X.$$

- ▶  $J(x) \neq \emptyset$ , also  $\exists f \in X'$  s.d.  $\|f\|_{X'} = \|x\|_X$  und  $\langle f, x \rangle = \|x\|_X^2$ .
- ▶ Sei  $h := \frac{f}{\|x\|_X} \in X'$ , dann gilt  $\|h\|_{X'} = 1$  und  $\langle h, x \rangle = \|x\|_X$ .

$\lim$  ist ein stetiges lineares Funktional auf  $c$ .

Satz.

Es existiert  $\text{LIM} \in (\ell^\infty)'$ , das  $\lim \in c'$  fortsetzt und s.d. zusätzlich

- ▶ Ist  $J : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ , so gilt  $\text{LIM}(x_n) = \text{LIM}(J(x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ .
- ▶ Ist  $x_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{LIM}(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \geq 0$ .

$\text{LIM}$  heißt *Banach-Limes*.

Beweis.

[ ÜA ]



Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H–B  
Geometrische  
Versionen von H–B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$X$  reeller Vektorraum

### Definition.

Ist  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  linear,  $f \not\equiv 0$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ , so heißt

$$\{x \in X : f(x) = \alpha\} = f^{-1}(\{\alpha\})$$

eine **Hyperebene zu  $f$** .

$A, B \subset X$  **werden durch die Hyperebene  $f^{-1}(\{\alpha\})$  getrennt**, falls

$$f(x) \leq \alpha \leq f(y) \quad \forall x \in A \quad \forall y \in B.$$

$A, B$  **werden durch  $f$  getrennt**, falls sie durch eine Hyperebene zu  $f$  getrennt werden.

Eine Hyperebene ist immer  $\neq X$ , da  $f$  nichtkonstant.

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

## Lemma.

Sei  $X$  normierter Vektorraum. Ist  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  linear,  $f \neq 0$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ , so ist die Hyperebene  $f^{-1}(\{\alpha\})$  genau dann abgeschlossen, wenn  $f$  stetig ist.

## Beweis.

“ $\Leftarrow$ ” Klar

“ $\Rightarrow$ ”

- ▶  $H^C$  ist offen und  $H^C \neq \emptyset$ .
- ▶ Sei  $x_0 \in H^C$ , o.B.d.A.  $f(x_0) < \alpha$  und  $\exists r > 0$  mit  $B_r(x_0) \subset H^C$ .
- ▶  $f(x) < \alpha \forall x \in B_r(x_0)$ , **denn sonst** für  $x_1 \in B_r(x_0)$  mit  $f(x_1) > \alpha$  gelte es  $[x_0, x_1] := \{\lambda x_0 + (1 - \lambda)x_1 : \lambda \in [0, 1]\} \subset B_r(x_0)$ , also

$$f(\lambda x_0 + (1 - \lambda)x_1) \neq \alpha, \quad \forall \lambda \in [0, 1],$$

obwohl für  $\lambda := \frac{\alpha - f(x_1)}{f(x_0) - f(x_1)} \in (0, 1)$  und  $1 - \lambda = \frac{f(x_0) - \alpha}{f(x_0) - f(x_1)}$

$$f(\lambda x_0 + (1 - \lambda)x_1) = \alpha \quad \zeta$$

- ▶ Also  $f(x_0 + rz) < \alpha \forall z \in B_1(0)$ , d.h.,  $f$  ist stetig mit  $\|f\| \leq \frac{1}{r}(\alpha - f(x_0))$ .

$X$  reeller Vektorraum

Definition.

$C \subset X$  heißt *konvex*, falls

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C \quad \forall x, y \in C, \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

Beispiel.

*Offene sowie abgeschlossene Kugeln in metrischen Räumen sind konvex.*

Anmerkung.

- ▶ *Ist  $C \subset X$  konvex, so ist auch die Menge ihrer inneren Punkte konvex.*
- ▶ *Ist  $(C_i)_{i \in I}$  eine Familie konvexer Mengen, so ist  $\bigcap_{i \in I} C_i$  konvex.*

# 1. geometrische Version des Satzes von Hahn–Banach

$X$  reeller Vektorraum

**Theorem.**

Sei  $C \subset X$  konvex, offen und  $C \neq \emptyset$ . Ist  $x_0 \in X \setminus C$ , so  
 $\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$  linear s.d.

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in C.$$

Ist  $X$  normiert, so ist  $f \in X'$  und insbesondere trennt die abgeschlossene Hyperebene  $f^{-1}(\langle f, x_0 \rangle)$  die Mengen  $\{x_0\}, C$ .

- ▶ Eigentlich kann die Annahme der Offenheit von  $C$  durch die Annahme der Existenz eines inneren Punktes von  $C$  ersetzt werden.
- ▶ In komplexen Räume gilt der Satz auch, allerdings mit  $\operatorname{Re} f(x) < \operatorname{Re} f(x_0) \quad \forall x \in C$ .

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H–B

Geometrische  
Versionen von H–B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$X$  reeller Vektorraum

Definition.

Sei  $C \subset X$  konvex. Das *Minkowski-Funktional zu  $C$*  ist

$$p_C : X \ni x \mapsto \inf\{\alpha > 0 : \alpha^{-1}x \in C\} \in [0, \infty].$$

## Lemma.

- Sei  $C \subset X$  offen und konvex,  $0 \in C$ . Dann gilt

$$C = \{x \in X : p_C(x) < 1\}$$

und  $p_C$  ist  $\geq 0$ , homogen und konvex. Ist  $X$  normiert, so

$$p_C(x) \leq M\|x\| \quad \forall x \in X.$$

- Sei  $p : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  konvex und homogen. Dann ist

$$D := \{x \in X : p(x) \leq 1\}$$

konvex. Gilt zusätzlich  $0 \leq p(x) < \infty \quad \forall x \in X$ , so ist jedes Element von

$$\{x \in X : p(x) < 1\}$$

ein innerer Punkt von  $D$ .

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- ▶ Sei  $x \in X$ . Da  $C$  offen,  $\exists r > 0$  s.d.  $B_r(0) \subset C$ , also

$$p_C(x) \leq \frac{1}{r} \|x\| \quad \forall x \in X.$$

- ▶ Homogenität: klar.
- ▶ " $C \subset \{x \in X : p_C(x) < 1\}$ ": für  $x \in C$   $\exists \epsilon > 0$  s.d.  $(1 + \epsilon)x \in C$ , also

$$p_C(x) \leq \frac{1}{1 + \epsilon} < 1.$$

- ▶ " $C \supset \{x \in X : p_C(x) < 1\}$ ": Ist  $p_C(x) < 1$ , so  $\exists \alpha \in (0, 1)$  s.d.  $\alpha^{-1}x \in C$  und somit

$$x = \alpha(\alpha^{-1}x) + (1 - \alpha)0 \in C,$$

da  $C$  konvex mit  $0 \in C$ .

- ▶ Fazit:  $C = \{x \in X : p_C(x) < 1\}$ .

Noch z.z.: Konvexität von  $p_C$

- Seien  $x, y \in X$  und  $\epsilon > 0$ , also  $\frac{x}{p_C(x)+\epsilon}, \frac{y}{p_C(y)+\epsilon} \in C$  und

$$\frac{tx}{p_C(x)+\epsilon} + \frac{(1-t)y}{p_C(y)+\epsilon} \in C \quad \forall t \in [0, 1].$$

- Für  $t := \frac{p_C(x)+\epsilon}{p_C(x)+p_C(y)+2\epsilon}$  gilt

$$\frac{x+y}{p_C(x)+p_C(y)+2\epsilon} \in C,$$

also

$$p_C \left( \frac{x+y}{p_C(x)+p_C(y)+2\epsilon} \right) < 1.$$

- Homogenität von  $p_C \Rightarrow p_C(x+y) \leq p_C(x) + p_C(y) + 2\epsilon \quad \forall \epsilon > 0.$

- ▶  $\forall x, y \in D \forall \lambda \in [0, 1]$  gilt

$$p(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda p(x) + (1 - \lambda)p(y) \leq \lambda + (1 - \lambda) = 1.$$

- ▶ Sei jetzt  $0 \leq p(x) < \infty \forall x \in X$ . Ist  $p(x) < 1$ , so gilt

$$p(x \pm ty) \leq p(x) + tp(\pm y), \quad \forall t > 0, \forall y \in X.$$

- ▶ Gilt  $p(-y) = p(y) = 0$ , so ist  $x \pm ty \in D \forall t > 0$ .

- ▶ Gilt jedoch  $(p(-y), p(y)) \neq (0, 0)$ , so ist  $x \pm ty \in D$  für

$$t < \frac{1 - p(x)}{\max\{|p(y)|, |p(-y)|\}}.$$

# Beweis der 1. geom. Version von Hahn–Banach

- ▶ Bis auf Translation nimm o.B.d.A. an, dass  $0 \in C$ . Betrachte  $p_C$ .
- ▶ Sei  $G := \mathbb{R}x_0$  und  $g : G \ni tx_0 \mapsto t \in \mathbb{R}$ .
- ▶ Es gilt  $g(x) \leq p_C(x) \forall x \in G$ , denn für  $t < 0$  nutzt man  $p_C \geq 0$  und für  $t \geq 0$  gilt  $g(tx_0) = t \leq tp_C(x_0) = p_C(tx_0)$  (da  $x_0 \notin C$ ).
- ▶ Hahn–Banach  $\Rightarrow \exists f$  lineare Fortsetzung von  $g$  mit  $f(x) \leq p_C(x) \leq M\|x\| \forall x \in X$  und somit  $f \in X'$ .
- ▶ Insbesondere:  $f(x_0) = g(x_0) = 1$  und  $f(x) < 1 \forall x \in C$ .

## 2. geometrische Version des Satzes von Hahn–Banach

$X$  reeller normierter Raum

**Korollar.**

*Seien  $A, B \subset X$  konvex und disjunkt und  $A$  offen. Dann*

*$\exists \phi \in X'$ , das  $A, B$  trennt.*

- ▶ Sei  $C := A - B$ .

- ▶  $C$  ist konvex: denn sind  $x_1 - y_1, x_2 - y_2 \in C$ , so ist

$$\lambda(x_1 - y_1) + (1 - \lambda)(x_2 - y_2) = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) - (\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \in A - B$$

da  $A, B$  konvex.

- ▶  $C$  ist offen, da  $C = \bigcup_{y \in B} (A - y)$ .

- ▶  $0 \notin C$ , da  $A, B$  disjunkt.

- ▶ 1. geometrische Version von Hahn-Banach  $\Rightarrow \exists \phi \in X'$  s.d.  
 $\phi(x - y) < 0 \forall (x - y) \in C$ , d.h.

$$\phi(x) < \phi(y) \quad \forall x \in A, \forall y \in B.$$

- ▶  $\exists \alpha \in \mathbb{R}$  mit

$$\alpha \in \left[ \sup_{x \in A} \phi(x), \inf_{y \in B} \phi(y) \right].$$

- ▶ Die Hyperebene  $\phi^{-1}(\{\alpha\})$  trennt  $A$  und  $B$ .

### 3. geometrische Version des Satzes von Hahn–Banach

$X$  reeller normierter Raum

$M \subset X$  heißt **kompakt**, falls jedes  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine (in  $M$ !) konvergente Teilfolge hat.

**Theorem.**

Seien  $A, B \subset X$  konvex und disjunkt,  $A$  abgeschlossen,  $B$  kompakt. Dann  $\exists$  eine abgeschlossene Hyperebene, die  $A, B$  **strikt trennt**, d.h.,  $\exists \phi \in X', \phi \neq 0$  und  $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  s.d.

$$\langle \phi, a \rangle \leq \alpha < \beta \leq \langle \phi, b \rangle \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H–B

**Geometrische  
Versionen von H–B**

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B

Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- ▶ Seien  $A_\epsilon := A + B_\epsilon(0)$ ,  $B_\epsilon := B + B_\epsilon(0)$ .
- ▶  $A_\epsilon, B_\epsilon$  sind konvex und nichtleer  $\forall \epsilon > 0$ .
- ▶  $A_\epsilon, B_\epsilon$  sind offen  $\forall \epsilon > 0$ , da  $B_\epsilon(0)$  offen.
- ▶  $\exists \epsilon > 0$  s.d.  $A_\epsilon \cap B_\epsilon = \emptyset$ : **denn sonst** seien  $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$  s.d.  $\epsilon_n \rightarrow 0$  und  $\|x_n - y_n\| < 2\epsilon_n$  und betrachte eine konvergente Teilfolge, also  $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset B$  mit  $\lim_k y_{n_k} = y \in A$ , obwohl  $A \cap B = \emptyset$ .  $\zeta$
- ▶ 2. geom. Version von Hahn-Banach  $\Rightarrow \exists \phi \in X'$ , das  $A_\epsilon, B_\epsilon$  trennt und somit  $\exists \alpha \in \mathbb{R}$  s.d.

$$\langle \phi, x + \epsilon w \rangle \leq \alpha \leq \langle \phi, y - \epsilon z \rangle \quad \forall x \in A, y \in B, w, z \in B_1(0),$$

also

$$\langle \phi, x \rangle + \epsilon \|\phi\| \leq \alpha \leq \langle \phi, y \rangle - \epsilon \|\phi\| \quad \forall x \in A, y \in B.$$

- ▶ Da  $\phi \neq 0$ ,

$$\langle \phi, x \rangle \leq \alpha - \epsilon \|\phi\| < \alpha + \epsilon \|\phi\| \leq \langle \phi, y \rangle \quad \forall x \in A, y \in B, z \in B_1(0),$$

also trennt  $\phi$   $A, B$  strikt.

Delio Mugnolo

$X$  normierter Raum

Satz.

Ist  $Z$  abg. Unterraum und  $x_0 \in X$ , so  $\exists f \in X'$  s.d.

$$f|_Z \equiv 0 \quad \text{aber} \quad f(x_0) \neq 0.$$

Beweis.

- ▶  $Z, \{x_0\}$  sind konvex, disjunkt und abgeschlossen bzw. kompakt.
- ▶  $\exists f \in X'$ , das sie strikt trennt, also  $\exists \alpha \in \mathbb{R}$  s.d.

$$\langle f, x \rangle < \alpha < \langle f, x_0 \rangle \quad \forall x \in Z.$$

- ▶  $\lambda \langle f, x \rangle = \langle f, \lambda x \rangle < \alpha \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ , also  $\langle f, x \rangle = 0, \forall x \in Z$ .

□

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H–B

Geometrische  
Versionen von H–B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# Folgerungen von Hahn–Banach - 6

## Satz.

Sei  $K \subset X$  kompakt und konvex. Ist  $T : K \rightarrow K$  stetig und *affin*, d.h.

$$T(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda T(x) + (1 - \lambda)T(y)$$

$\forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0, 1]$ , so hat  $T$  einen Fixpunkt.

Man verwendet:

## Theorem. (A.N. Tychonov 1935)

Das Produkt endlich vieler kompakten Mengen ist wieder kompakt.

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- ▶  $T$  hat einen Fixpunkt, **denn sonst** wären  $\Delta, \Gamma \subset X \times X$  disjunkt, wobei

$$\Delta := \{(x, x) \in X \times X : x \in K\}, \quad \Gamma := \{(y, Ty) \in X \times X : y \in K\}.$$

- ▶  $\text{id}, T$  stetig  $\Rightarrow \Delta, \Gamma$  abgeschlossen.
- ▶  $T$  stetig  $\Rightarrow T(K)$  kompakt.
- ▶  $K \times K \supset \Delta$  abgeschlossen,  $K \times T(K) \supset \Gamma$  abgeschlossen
- ▶ Tychonov  $\Rightarrow K \times K, K \times T(K)$  kompakt  $\Rightarrow \Delta, \Gamma$  kompakt.
- ▶  $\Delta, \Gamma$  konvex da  $T$  affin.
- ▶ 3. geom. Version von Hahn-Banach  $\Rightarrow \Delta, \Gamma$  werden von einer abgeschlossenen Hyperebene in  $X \times X$  strikt getrennt, also  $\exists \phi \in (X \times X)' \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  s.d.

$$\phi(x, x) \leq \alpha < \beta \leq \phi(y, Ty), \quad \forall x, y \in X.$$

- ▶ Dann sind  $f_1, f_2 \in X'$ , wobei

$$f_1(x) := \phi(x, 0), \quad f_2(x) := \phi(0, x), \quad x \in X.$$

- ▶ Es gilt

$$f_1(x) + f_2(x) \leq \alpha < \beta \leq f_1(y) + f_2(Ty), \quad \forall x, y \in X.$$

- ▶ Für  $x = y$  gilt  $f_2(x) \leq \alpha - f_1(x) < \beta - f_1(x) \leq f_2(Tx)$ , also

$$f_2(Tx) - f_2(x) \geq \beta - \alpha > 0, \quad \forall x \in X,$$

- ▶ Da  $f_2$  stetig ist  $f_2(K)$  ist kompakt.
- ▶  $(f_2(T^n x - x))_{n \in \mathbb{N}} \subset f_2(K)$  hat eine konvergente Teilfolge.
- ▶ Dennoch gilt

$$f_2(T^n x - x) = \sum_{k=1}^n (f_2(T^k x) - f_2(T^{k-1} x)) \geq n(\beta - \alpha) \rightarrow \infty,$$

also hat  $(f_2(T^n x - x))_{n \in \mathbb{N}}$  keinen Häufungspunkt.  $\zeta$

# Anwendung: der Fixpunktsatz von Kakutani

$X$  normierter Raum,  $I$  Menge

Korollar. (S. Kakutani 1941)

*Sei  $K \subset X$  kompakt und konvex. Sei  $T_i : K \rightarrow K$  stetig und affin  $\forall i \in I$ . Kommutieren alle  $T_i$  paarweise, so haben sie einen gemeinsamen Fixpunkt.*

Sei  $K_i := \{x \in K : T_i x = x\}$ . Z.z.:  $\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$ .

- ▶ Obiger Fixpunktsatz  $\Rightarrow K_i \neq \emptyset \forall i \in I$ .
- ▶  $K_i$  ist kompakt (da  $K_i$  abgeschlossen in  $K$ ) und konvex (da  $T$  affin)  $\forall i \in I$ .
- ▶  $\forall x \in K_j$  gilt

$$T_j T_i x = T_i T_j x = T_i x,$$

also  $T_i x \in K_j$ , d.h.  $T_i(K_j) \subset K_j$ , also ist  $T_i|_{K_j}$  eine stetige affine Abbildung auf  $K_j$ .

- ▶ Obiger Fixpunktsatz  $\Rightarrow \exists$  Fixpunkt  $x_{ij}$  von  $T_i|_{K_j}$ ,  $x_{ij} \in K_i \cap K_j$ .
- ▶ Also  $K_i \cap K_j \neq \emptyset \forall i, j \in I$ .
- ▶ Z.z.: Endliche Durchschnitte von  $K_i$ 's sind  $\neq \emptyset$  – Durch Induktion!
- ▶ Induktionsanfang: schon bewiesen.
- ▶ Induktionsschritt: Ist  $\bigcap_{i \in J} K_i \neq \emptyset$  mit  $|J| = n$  und betrachte  $K_{i'}$ , so sind beide  $\bigcap_{i \in J} K_i$  und  $K_{i'}$  kompakt, konvex und  $\neq \emptyset$  und man zeigt wie oben, dass  $\bigcap_{i \in J} K_i \cap K_{i'} \neq \emptyset$ . [ Details: **ÜA** ]

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B

Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# Die Polare einer Menge

$X$  normierter Raum,  $M \subset X$ ,  $N \subset X'$

## Definition.

- ▶ Die **Polare**  $M^\circ$  von  $M$  ist

$$\{f \in X' : |\langle f, x \rangle| \leq 1 \forall x \in M\}.$$

- ▶ Die **Polare**  ${}^\circ N$  von  $N$  ist

$$\{x \in X : |\langle f, x \rangle| \leq 1 \forall f \in N\}.$$

- ▶ Die **Bipolare** von  $M$  ist  ${}^\circ(M^\circ)$ .

Ist  $M_1 \subset M_2$ , so gilt  $M_2^\circ \subset M_1^\circ$ .

## Definition.

- ▶  $M$  heißt *ausgeglichen*, falls

$$x \in M \ \& \ |\lambda| \leq 1 \Rightarrow \lambda x \in M.$$

- ▶  $M$  heißt *absolutkonvex*, falls  $M$  konvex und ausgeglichen ist.
- ▶ Die *konvexe Hülle*  $co(M)$  von  $M$  ist die kleinste konvexe Menge  $\supset M$ .
- ▶ Die *absolutkonvexe Hülle*  $absco(M)$  von  $M$  ist die kleinste absolutkonvexe Menge  $\supset M$ .

## [ ÜA ]

- ▶ Ist  $M$  absolutkonvex, so ist immer  $M$  sternförmig bzgl. 0, aber nicht umgekehrt.
- ▶  $M^\circ$  und  ${}^\circ N$  sind immer abgeschlossen und absolutkonvex.
- ▶  $M$  ist genau dann absolutkonvex, wenn  $\forall x, y \in M$

$$\lambda, \mu \in \mathbb{K} \ \& \ |\lambda| + |\mu| \leq 1 \Leftrightarrow \lambda x + \mu y \in M.$$

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B

Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

## Beispiel.

Seien  $X$  normierter Raum,  $Y$  Unterraum von  $X$ ,  $Z$  Unterraum von  $X'$ . Dann gilt:

- ▶  $Y^\circ = \{f \in X' : \langle f, x \rangle = 0 \forall x \in Y\}$ .
- ▶  ${}^\circ Z = \{x \in X : \langle f, x \rangle = 0 \forall f \in Z\}$ .
- ▶  $\{0\}^\circ = X'$  und  ${}^\circ\{0\} = X$ .
- ▶ Ein Unterraum ist immer absolutkonvex.

# Hahn–Banach für absolutkonvexe Mengen

$X$  reeller normierter Raum

**Korollar.**

*Seien*

- ▶  $A, B \subset X$  disjunkt,
- ▶  $A$  abgeschlossen und absolutkonvex,
- ▶  $B$  kompakt und konvex.

Dann  $\exists \phi \in X'$ ,  $\phi \neq 0$  und  $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  s.d.

$$|\langle \phi, x \rangle| \leq \alpha < \beta \leq \langle \phi, y \rangle \quad \forall x \in A, \forall y \in B.$$

**Beweis.**

$|\langle \phi, x \rangle| = \langle \phi, x \rangle \operatorname{sgn}(\langle \phi, x \rangle) = \langle \phi, \operatorname{sgn}(\langle \phi, x \rangle)x \rangle$ , mit  $\operatorname{sgn}(\langle \phi, x \rangle)x \in A$   
da  $A$  ausgeglichen. □

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H–B

Geometrische  
Versionen von H–B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

## Folgerungen von Hahn–Banach - 7

$X$  normierter Raum

Theorem. (Bipolarensatz)

Ist  $M \subset X$ ,  $M \neq \emptyset$ . Dann gilt  ${}^\circ(M^\circ) = \overline{\text{absco}(M)}$ .

Korollar.

Für einen Unterraum  $Y$  von  $X$  gilt genau dann  $\overline{Y} = X$ , wenn  $Y^\circ = \{0_{X'}\}$ .

Beweis.

- ▶ “ $\Rightarrow$ ”  $f|_Y \equiv 0 \forall f \in Y^\circ$  und deshalb auch (da  $Y$  dicht)  
 $0 \equiv f|_{\overline{Y}} = f|_X \forall f \in Y^\circ$ .
- ▶ “ $\Leftarrow$ ” Gilt  $Y^\circ = \{0\}$ , so ist  $\overline{Y} = \overline{\text{absco}(Y)} = {}^\circ(Y^\circ) = {}^\circ\{0_{X'}\} = X$ .

□

# Beweis des Bipolarenatzes

Wir zeigen  $\overline{\text{absco}(M)} \subset {}^\circ(M^\circ) \subset {}^\circ(\overline{\text{absco}(M)^\circ}) \subset \overline{\text{absco}(M)}$

- ▶ Sei  $x \in M$ . Dann gilt  $|\langle f, x \rangle| \leq 1 \forall f \in M^\circ$  und somit  $x \in {}^\circ(M^\circ)$ .
- ▶ Somit ist  $M \subset {}^\circ(M^\circ)$  und deshalb  $\overline{\text{absco}(M)} \subset {}^\circ(M^\circ)$ , da Polare abgeschlossen und absolutkonvex sind.
- ▶  ${}^\circ(M^\circ) \subset {}^\circ(\overline{\text{absco}(M)^\circ})$ , da  $M \subset \overline{\text{absco}(M)}$  und somit  $\overline{\text{absco}(M)^\circ} \subset M^\circ$ .
- ▶ Gilt  $\overline{\text{absco}(M)} = X$ , so gibt es nichts zu zeigen.
- ▶ Ist  $x_0 \in X \setminus \overline{\text{absco}(M)}$ , so  $\exists \phi \in X'$ ,  $\phi \neq 0$ ,  $\exists \alpha \in \mathbb{R}$  s.d.

$$|\langle \phi, x \rangle| \leq \alpha < \langle \phi, x_0 \rangle \quad \forall x \in \overline{\text{absco}(M)},$$

dank Hahn–Banach, da  $\{x_0\}$  kompakt und konvex und  $\overline{\text{absco}(M)}$  abgeschlossen und absolutkonvex sind.

- ▶ O.b.d.A.  $\alpha = 1$  und somit  $\phi \in \overline{\text{absco}(M)^\circ}$  aber  $x_0 \notin {}^\circ(\overline{\text{absco}(M)^\circ})$ .

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H–B  
Geometrische  
Versionen von H–B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$X$  normierter Vektorraum.

## Definition.

Der Banachraum  $X'' := (X')'$  heißt **Bidual** von  $X$ .

## Satz.

$X$  ist isometrisch zu  $X''$ .

## Beweis.

- ▶ Betrachte  $j : X \ni x \mapsto j_x \in X''$ , wobei

$$j_x : X' \ni f \mapsto \langle f, x \rangle \in \mathbb{K}.$$

- ▶  $\forall x \in X$   $j_x$  linear und

$$\|j_x\| = \sup_{\|f\|_{X'} \leq 1} |j_x(f)| = \sup_{\|f\|_{X'} \leq 1} |\langle f, x \rangle| = \|x\|,$$

dank Hahn–Banach.



Identifiziere also jeden normierten Raum  $X$  mit  $j(X) \subset X''$ .

**Lemma.**

*Ein normierter Raum  $X$  ist genau dann vollständig, wenn  $j(X)$  in  $X''$  abgeschlossen ist.*

**Korollar.**

*Zu jedem normierten Raum  $X \exists \hat{X}$  Banachraum, die **Vervollständigung** von  $X$ , s.d.  $\overline{X} = \hat{X}$ .*

**Beweis.**

$\hat{X} := \overline{j^{-1}j(X)}$ . □

## Definition.

Ein normierter Vektorraum  $X$  heißt **reflexiv**, falls  $j : X \rightarrow X''$  surjektiv (und somit ein Isomorphismus) ist.

Z.B., jeder endlichdimensionale Raum ist reflexiv.

## Theorem.

*Jeder reflexive normierte Raum ist vollständig.*

## Beweis.

Jeder reflexive  $X$  ist isomorph zum Banachraum  $X''$ : somit ist  $X$  Banachraum. □

# Fundamentales Beispiel: die $\ell^p$ -Räume

Zur Erinnerung:

$$\ell^p := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p < \infty\} \quad \forall p \in [1, \infty)$$

**Satz.**

$(\ell^p)'$  ist isometrisch isomorph zu  $\ell^q$ ,  $\forall p, q \in (1, \infty)$  s.d.

$$p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

$(\ell^p)'$  und  $\ell^q$  werden herkömmlich identifiziert.

# Beweis - 1

Beweis für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ : ähnlich falls  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

- ▶ Ist  $y := (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^q$ , so ist

$$\gamma_y : \ell^p \ni (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n \in \mathbb{R}$$

linear und ein (dank Hölderscher Ungleichung) wohldefiniertes stetiges Funktional,  $\gamma_y \in (\ell^p)'$ , mit

$$\|\gamma_y\|_{(\ell^p)'} \leq \|y\|_q.$$

- ▶  $\gamma : \ell^q \ni y \mapsto \gamma_y \in (\ell^p)'$  ist linear.
- ▶ Sei  $\psi \in (\ell^p)'$  und  $y_n := \psi(e_n)$ , es gilt

$$\langle \psi, x \rangle = \left\langle \psi, \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n \right\rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n \quad \forall x \in c_{00}.$$

- ▶ Für festes  $n \in \mathbb{N}$  definiere die abgeschnittene Folge  $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$  durch

$$x_k^{(n)} := \begin{cases} |y_k|^{q-2} y_k & \text{falls } k \leq n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

## Beweis - 2

- ▶ Dann gilt

$$\sum_{k=1}^n |y_k|^q = \sum_{k=1}^n x_k y_k = \langle \psi, x^{(n)} \rangle \leq \|\psi\| \|x^{(n)}\|_p.$$

- ▶ Da  $p^{-1} + q^{-1} = 1$  gilt weiter

$$\|x^{(n)}\|_p^p = \sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k^{(n)}|^p = \sum_{k=1}^n |y_k|^{(q-1)p} = \sum_{k=1}^n |y_k|^q.$$

- ▶ Somit  $\sum_{k=1}^n |y_k|^q \leq \|\psi\| \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}$ , d.h.

$$\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|\psi\|.$$

- ▶ Für  $n \rightarrow \infty$  erhält man

$$\|y\|_q = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|\psi\| < \infty.$$

- ▶ Also  $y \in \ell^q$  und  $\gamma_y = \psi$  da  $\overline{c_{00}} = \ell^p$ , also  $\|\gamma_y\|_{(\ell^p)'} = \|y\|_q$ .

Zur Erinnerung:

$$\ell^\infty := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}.$$

**Satz.**

$(\ell^1)'$  ist isometrisch isomorph zu  $\ell^\infty$ .

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- ▶ Jede  $x \in \ell^1$  hat eine eindeutige Darstellung  $x = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k e_k$ ,  
( $e_k$ ) $_{k \in \mathbb{N}}$  kanonische Basis.

- ▶ Betrachte

$$\gamma : (\ell^1)' \ni \psi \mapsto (y_k)_{k \in \mathbb{N}} := (\langle \psi, e_k \rangle)_{k \in \mathbb{N}}.$$

- ▶  $\gamma$  ist linear.
- ▶ Dann ist

$$\langle \psi, x \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} y_k x_k, \quad \forall x = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k e_k \in \ell^1.$$

- ▶  $|y_k| = |\langle \psi, e_k \rangle| \leq \|e_k\| \|\psi\|_{(\ell^1)'} = \|\psi\|_{(\ell^1)'}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ , d.h.  $y \in \ell^\infty$   
mit  $\|y\|_\infty \leq \|\psi\|_{(\ell^1)'}$ .
- ▶ Also ist  $\gamma : (\ell^1)' \rightarrow \ell^\infty$ ,  $\gamma$  beschränkt.

Noch z.z.:  $\gamma$  ist surjektiv und isometrisch.

- ▶ Sei  $y \in \ell^\infty$  und definiere  $\psi$  durch

$$\langle \psi, x \rangle := \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k y_k, \quad x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1.$$

- ▶ Dann ist  $\psi$  linear und (wegen Hölder) stetig, also  $\psi \in (\ell^1)'$  und  $\gamma\psi = y$  nach Konstruktion.
- ▶  $\gamma$  ist surjektiv
- ▶ Seien  $\psi \in (\ell^1)'$  und  $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ . Dann ist

$$|\langle \psi, x \rangle| = \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k y_k \right| \leq \|y\|_\infty \sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k| = \|x\|_1 \|y\|_\infty,$$

also  $\|\psi\|_{(\ell^1)'} \leq \|y\|_\infty$ .

- ▶ Da aber  $\|y\|_\infty \leq \|\psi\|_{(\ell^1)'}$  (schon bekannt),  
 $\|y\|_\infty = \|\gamma\psi\|_\infty = \|\psi\|_{(\ell^1)'}$ .

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

## Beispiel.

Sei  $X = c_0$ . Man kann zeigen, dass  $X' = \ell^1$ . Somit ist  $c_0$  nicht reflexiv.

[ Details: **ÜA** ]

## Satz.

Ist ein normierter Raum  $X$  reflexiv, so ist jeder seiner abgeschlossenen Unterräume  $Y$  reflexiv.

## Beweis.

- ▶ Sei  $\phi \in Y''$ . Z.z.:  $\phi = j_{x_0}$  für ein  $x_0 \in Y$ .
- ▶ Betrachte  $\psi : X' \ni x' \mapsto \phi(x'|_Y) \in \mathbb{K}$ : somit ist  $\psi \in X''$ .
- ▶  $X$  reflexiv  $\Rightarrow \psi = j_{x_0}$  für ein  $x_0 \in X$  und somit

$$\phi(x'|_Y) = \langle x', x_0 \rangle \quad \forall x' \in X',$$

da  $\phi(x'|_Y) = \psi(x') = j_{x_0}(x') \equiv \langle x', x_0 \rangle$ .

- ▶  $x_0 \in Y$ , **denn sonst**  $\exists x' \in X'$  s.d.  $x'|_Y \equiv 0$  aber  $\langle x', x_0 \rangle \neq 0$  dank Hahn-Banach  $\zeta$
- ▶ Ist  $y' \in Y'$ , so  $\exists x' \in X'$  mit  $x'|_Y = y'$  dank Hahn-Banach.
- ▶ Somit

$$\phi(y') = \langle y', x_0 \rangle \quad \forall y' \in Y',$$

d.h.  $\phi = j_{x_0}$ .

## Korollar.

Ein normierter Raum  $X$  ist genau dann reflexiv, wenn  $X'$  reflexiv ist.

## Beweis.

" $\Rightarrow$ "

- ▶ Sei  $\phi \in (X')'' = (X'')'$ .
- ▶ Sei  $x'_0 := \phi \circ j \in X'$  ( $j: X \rightarrow X''$  kanon. Einbettung), also

$$\langle x'_0, x \rangle = \langle \phi, jx \rangle, \quad \forall x \in X.$$

- ▶ Sei  $x'' = j_{x_1} \in X''$  (da  $X$  reflexiv). Es gilt

$$\langle \phi, x'' \rangle = \langle \phi, j_{x_1} \rangle = \langle x'_0, x_1 \rangle = x''(x'_0),$$

d.h.  $\phi = j_{x'_0}$ .

" $\Leftarrow$ " Es folgt aus " $\Rightarrow$ ", dass  $X''$  reflexiv ist und somit  $X$  (abg. Unterraum von  $X''$ ) auch. □

$X$  normierter Raum

**Definition.**

$X$  heißt **separabel**, wenn es eine abzählbare Teilmenge  $M \subset X$  gibt s.d.  $\overline{M} = X$ .

**Theorem.**

Ist  $X'$  separabel, so ist  $X$  separabel.

**Korollar.**

Ist  $X$  reflexiv, so ist  $X$  genau dann separabel, wenn  $X'$  separabel ist.

- ▶ Sei  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X'$  dicht in  $X'$ .

- ▶ Wähle  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  mit

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{aber} \quad |\langle f_n, x_n \rangle| \geq \frac{1}{2} \|f_n\| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- ▶ Sei  $M$  der von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  aufgespannte Unterraum von  $X$ .

- ▶ Sei  $f \in M^\circ \subset X'$ , also  $\exists \{f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$  s.d.  $\lim_k f_{n_k} = f$ .

- ▶ Es gilt

$$0 \leftarrow \|f - f_{n_k}\| \geq |\langle (f - f_{n_k}), x_{n_k} \rangle| \stackrel{f \in M^\circ}{=} |\langle f_{n_k}, x_{n_k} \rangle| \geq \frac{1}{2} \|f_{n_k}\|,$$

also  $\lim_k f_{n_k} = 0$  und somit  $f = 0$ .

- ▶ Also  $\overline{M} = X$ , da  $M^\circ = \{0\}$ .

- ▶ Sei nun  $K$  die Menge aller  $\mathbb{Q}$ -Linearkombinationen von  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ , so ist diese Menge abzählbar.

- ▶  $\overline{K} \supset M$  [ÜA] und  $\overline{M} \supset X$ , also  $\overline{K} \supset X$ .

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume**Satz.**

Ist  $p \in [1, \infty)$ , so ist  $\ell^p$  separabel.

**Korollar.**

$c_0$  ist separabel.

**Beweis.**

$c_0$  ist Prädual vom separablen Raum  $\ell^1$ . □

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

▶ Sei  $M := \{(x_1, \dots, x_N, 0 \dots) \in \mathbb{Q} : N \in \mathbb{N}\} = c_{00} \cap \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ .

▶  $M$  ist abzählbar.

▶  $\forall x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$  s.d.

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\epsilon^p}{2}.$$

▶ Wähle  $y_1, \dots, y_N \in \mathbb{Q}$  s.d.  $|x_k - y_k|^p < \frac{\epsilon^p}{2N} \forall k \leq N$ .

▶ Also

$$\|x - y\|_p^p = \sum_{k=1}^N |x_k - y_k|^p + \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p < \epsilon^p.$$

▶  $\overline{M} = \ell^p$ .

## Satz.

$\ell^\infty$  ist nicht separabel.

## Beweis.

- ▶ Betrachte die Menge  $M$  aller Folgen, die nur aus 0, 1 bestehen. Diese Menge ist zu  $2^{\mathbb{N}}$  bijektiv vermöge  $x_n = 1 \Leftrightarrow n \in A \in 2^{\mathbb{N}}$ .
- ▶ Somit ist  $M$  überabzählbar.
- ▶ Sind  $x, y \in M$ ,  $x \neq y$ , so  $\exists n \in \mathbb{N}$  mit  $x_n \neq y_n$ , also  $\|x - y\|_\infty = 1$ . ( $M$  ist also bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$  ein diskreter metrischer Raum.)
- ▶ Betrachte die Menge  $\bigcup_{x \in M} B_{\frac{1}{2}}(x)$ .
- ▶ Gilt  $K \subset M$  mit  $\overline{K} = M$ , d.h. gilt

$$\forall \epsilon > 0 \forall x \in M \exists y \in K \text{ s.d. } y \in B_\epsilon(x),$$

so muss es mindestens ein  $y \in K$  in jedem  $B_{\frac{1}{2}}(x)$  geben und somit muss  $K$  auch überabzählbar sein.



## $X$ normierter Raum

### Korollar.

*Ist  $X$  separabel mit  $X'$  nicht separabel, so ist  $X'$  nicht reflexiv.*

### Beweis.

- ▶ Ist  $X$  reflexiv, so ist  $X$  genau dann separabel, wenn  $X''$  separabel ist.
- ▶ Ist  $X''$  separabel, so ist  $X'$  separabel.



### Korollar.

*$\ell^p$  ist genau dann reflexiv, wenn  $p \in (1, \infty)$ .*

### Beweis.

- ▶  $(\ell^p)' = \ell^q$  mit  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ , also  $(\ell^p)'' = \ell^p$  falls  $1 < p < \infty$ .
- ▶  $\ell^1$  ist separabel, aber  $\ell^\infty = (\ell^1)'$  ist es nicht  $\Rightarrow \ell^1$  ist nicht reflexiv.
- ▶ Somit ist auch  $\ell^\infty$  nicht reflexiv.

Kann ein neuer Konvergenzbegriff helfen?

**Definition.**

Sei  $X$  ein normierter Raum. Die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  **konvergiert schwach gegen  $x \in X$ ,  $x_n \rightharpoonup x$ , falls**

$$\langle f, x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, x_n \rangle \quad \forall f \in X'.$$

**Anmerkung.**

*Ist  $X$  ein Banachraum, so impliziert der Satz von Banach–Steinhaus, dass jede schwach-konvergente Folge beschränkt ist.*

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H–B  
Geometrische  
Versionen von H–B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# Starke Konvergenz von Operatoren

$X, Y$  normierte Räume

**Definition.**

Die Folge  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$  **konvergiert stark gegen**  
 $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ , falls

$$T x = \lim_{n \in \mathbb{N}} T_n x \quad \forall x \in X.$$

- ▶ Der Satz von Banach–Steinhaus ist somit eine Aussage über starke Konvergenz.
- ▶ Ist insbesondere  $Y = \mathbb{K}$ , so ist konvergiert  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X'$  stark gegen  $f$ , falls

$$\langle f, x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, x \rangle \quad \forall x \in X.$$

# Schwache\*-Konvergenz von Operatoren

$X$  normierter Raum

$X'$  ist ein normierter Raum, also kann eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X'$  schwach konvergieren, d.h.

$$\langle x'', f \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x'', f_n \rangle \quad \forall x'' \in X''.$$

## Definition.

Die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X'$  *konvergiert schwach\** gegen  $f \in X'$ ,  $f_n \xrightarrow{*} f$ , falls

$$\langle f, x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, x \rangle \quad \forall x \in X.$$

Die entsprechenden Topologien bezeichnet man

$$\sigma(X', X'') \quad \text{bzw.} \quad \sigma(X', X).$$

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- ▶ Die schwache\* Konvergenz ist also eigentlich die *starke* Konvergenz, wenn man  $X'$  als normierter Raum ansieht.
- ▶ Der Satz von Banach–Steinhaus impliziert, dass  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X'$  genau dann schwach\* gegen  $f \in X'$  konvergiert, wenn  $\exists M > 0$  s.d.  $\|f_n\|_{X'} \leq M \forall n \in \mathbb{N}$  und  $\exists D \subset X, \overline{D} = X$ , s.d.  $\exists \lim \langle f_n, x \rangle \forall x \in D$ .
- ▶ Insbesondere sind alle schwach\*-konvergente Folgen in  $X'$  beschränkt.

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H–B  
Geometrische  
Versionen von H–B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- ▶ Der Grenzwert bzgl.  $\sigma(X', X)$  ist eindeutig. [ ÜA ]
- ▶ Aus  $\sigma(X', X'')$ -Konvergenz folgt  $\sigma(X', X)$ -Konvergenz, da  $X \subset X''$ .
- ▶ Insbesondere sind alle schwach-konvergente Folgen in  $X'$  beschränkt.
- ▶ Aus  $\sigma(X', X)$ -Konvergenz folgt i.A. **nicht**  $\sigma(X', X'')$ -Konvergenz.  
Denn für  $X = c_0$  und  $X' = \ell^1$  gilt: die Basisvektoren  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergieren schwach\* gegen 0, aber nicht schwach, denn  $\mathbf{1} \in \ell^\infty = (\ell^1)'$  und  $\langle \mathbf{1}, e_n \rangle \equiv 1$ .

# Das Diagonalfolgen-Argument

## Lemma.

Sei  $(M_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge kompakter metrischer Räume.

Ist  $\forall n \in \mathbb{N} (x_m^{(n)})_{m \in \mathbb{N}} \subset M_n$ , so  $\exists \phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  streng monoton wachsend s.d.  $\forall n \in \mathbb{N} \exists \lim_{m \rightarrow \infty} x_{\phi(m)}^{(n)}$ .

## Beweis.

- ▶ Finde (Induktion! [ Details ÜA ]) eine Folge unendlicher Mengen  $J_n \subset \mathbb{N}$  s.d.  $J_1 \supset J_2 \supset \dots$
- ▶ Sei  $\phi(n) := n$ -tes Element von  $J_n$ , so dass  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  streng monoton wachsend ist.
- ▶ Sei  $J := \{\phi(n) \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$ .
- ▶  $|J \setminus J_n| < \infty \forall n \in \mathbb{N}$ .
- ▶  $\exists \lim_{m \rightarrow \infty} x_{\phi(m)}^{(n)}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- ▶  $(x_{\phi(m)}^{(n)})_{m \in \mathbb{N}} = (x_m^{(n)})_{m \in J}$  konvergiert.



$X$  Banachraum

Satz. (S. Banach 1932)

*Ist  $X$  separabel, so besitzt jede beschränkte Folge in  $X'$  eine schwach\*-konvergente Teilfolge.*

Beweis.

- ▶ Sei  $(f_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset X'$  mit  $\|f_m\| \leq M$ .
- ▶ Betrachte eine dichte Teilmenge  $\{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$ .
- ▶  $x_m^{(n)} := \langle f_m, x_n \rangle \in \mathbb{K}$  mit  $|x_m^{(n)}| \leq M\|x_n\|$ .
- ▶ Diagonalisierung für  $M_n := \overline{B_{M\|x_n\|}(0)} \Rightarrow \exists (f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  s.d.  $\forall m \in \mathbb{N}$   
 $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_{n_k}, x_m \rangle$ .
- ▶ Satz von Banach–Steinhaus  $\Rightarrow \forall x \in X \exists \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_{n_k}, x \rangle$ .

□

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H–B  
Geometrische  
Versionen von H–B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$X$  Banachraum

## Lemma

- (1) *Ist  $X$  separabel, etwa  $X = \overline{\text{span}\{x_m : m \in \mathbb{N}\}}$ , so ergibt sich aus*

$$d(\phi, \psi) := \sum_{m \in \mathbb{N}} 2^{-m} |\langle \phi - \psi, x_m \rangle|$$

*eine Metrik auf  $B_1(0) \subset X'$ , welche  $\sigma(X', X)$  definiert.*

- (2) *Ist  $X$  reflexiv und separabel, so gibt es eine Metrik auf  $B_1(0) \subset X$ , welche die schwache Topologie definiert.*

**Beweis.**

[ Details: **ÜA** ]



Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# $X$ Banachraum

## Anmerkung.

- ▶ *L. Alaoglu bewies 1940, dieser Satz gilt auch, wenn  $X$  ein (möglicherweise nichtseparabel) allgemeiner normierter Raum ist.*
- ▶ *Der Satz von Banach–Alaoglu besagt:  $B_1(0) \subset X'$  ist schwach\*-kompakt.*
- ▶ *Analog gilt auch, falls  $X$  reflexiv und separabel ist:  $B_1(0) \subset X$  ist schwach-kompakt.*
- ▶ *Ist  $X'$  separabel, so besitzt jede beschränkte Folge in  $X$  eine schwach-Cauchy-Teilfolge, da i.A. besitzt jede beschränkte Folge in  $X''$  eine  $\sigma(X'', X')$ -konvergente Teilfolge.*
- ▶ *Insbesondere hat jede Folge in  $B_1(0) \subset c_0$  eine schwach-konvergente Teilfolge.*

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H–B  
Geometrische  
Versionen von H–B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# $X$ Banachraum

## Korollar.

*Ist  $X$  reflexiv, so besitzt jede beschränkte Folge in  $X$  eine schwach-konvergente Teilfolge.*

(Die Umkehrung gilt auch [ ÜA ]).

## Beweis.

- ▶ Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  mit  $\|x_n\| \leq \mu \forall n \in \mathbb{N}$ .
- ▶ Sei  $M$  der von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  aufgespannte Unterraum von  $X$ .
- ▶  $\overline{M}$  ist separabel und reflexiv (da abg. Unterraum eines reflexiven Raumes).
- ▶ Auch  $\overline{M}'$  ist separabel und reflexiv.
- ▶ Satz von Banach–Alaoglu für  $\overline{M}' \Rightarrow$  jede beschr. Folge in  $\overline{M}''$  besitzt eine schwach\*-konv. Teilfolge  $\Rightarrow$  jede beschr. Folge in  $\overline{M}$  besitzt eine schwach-konv. Teilfolge.
- ▶ Somit besitzt  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine schwach-konv. Teilfolge.



Also: Ist  $X$  ein separabler oder reflexiver Banachraum, so besitzt jede beschränkte Folge in  $X'$  eine schwach\*-konvergente Teilfolge.

## Anmerkung.

*I.A. ist das falsch:*

- ▶ Sei  $X = (\ell^\infty)'$  und  $\phi_n : X \ni (x_m)_{m \in \mathbb{N}} \mapsto x_n \in \mathbb{C}$ .
- ▶ Für eine beliebige Teilfolge  $(\phi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  und

$$x_n := \begin{cases} (-1)^k & \text{falls } n = n_k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- ▶ Es gilt  $x := (x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$  und  $\phi_{n_k}(x) = (-1)^k$ , also konvergiert **keine** Teilfolge von  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  schwach\* (und somit auch nicht schwach).

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

**Satz.**

*Konvergiert eine Folge in  $\ell^1$  schwach, so konvergiert sie bereits in Norm.*

Für einen Beweis: vgl. J. Conway, *A Course in Functional Analysis*,  
§V.5.

# $H$ Vektorraum auf $\mathbb{K}$

## Definition.

Ein **Skalarprodukt**  $(\cdot|\cdot)$  auf  $H$  ist

$$(\cdot|\cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$$

s.d.

$$(1) \quad (x|x) \geq 0 \text{ und } (x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$(2) \quad (\alpha x|y) = \alpha(x|y),$$

$$(3) \quad (x|y+z) = (x|y) + (x|z).$$

sowie (falls  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ )

$$(4) \quad (x|y) = (y|x)$$

bzw. (falls  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ )

$$(4)' \quad (x|y) = \overline{(y|x)}$$

$\forall x, y \in H, \alpha \in \mathbb{K}$ .

$(H, (\cdot|\cdot)_H)$  heißt dann **Prähilbertraum**.

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien**Intermezzo:  
Hilberträume**

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- ▶ Jedes Skalarprodukt definiert eine Norm durch

$$\|x\| := (x|x)^{\frac{1}{2}}.$$

[ ÜA ]

- ▶ Ist ein Prähilbertraum bzgl. der assoziierten Norm vollständig, so heißt er **Hilbertraum**.
- ▶ Insbesondere ist jeder Hilbertraum ein Banachraum.



David Hilbert  
(1862–1943)

# Charakterisierung eines Prähilbertraums

## Lemma

- Ist  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und  $H$  Prähilbertraum, so gilt  $\forall x, y \in H$

$$(x|y)_H = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

- Ist  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  und  $H$  Prähilbertraum, so gilt  $\forall x, y \in H$

$$(x|y)_H = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2).$$

Beweis.  
[ ÜA ]

□

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

**Intermezzo:**  
**Hilberträume**

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

## $H$ Prähilbertraum

### Definition.

$x, y \in H$  sind orthogonal bzw.  $x \perp y$ , falls

$$(x|y) = 0.$$

$A, B \subset H$  sind orthogonal bzw.  $A \perp B$ , falls

$$(x|y) = 0 \quad \forall x \in A, y \in B.$$

$A^\perp$  ist der Unterraum aller  $y \in H$ , so dass

$$y \perp x \quad \forall x \in A.$$

# Cauchy–Schwarz'sche Ungleichung

$H$  Prähilbertraum

Lemma.

$$|(x|y)|^2 \leq (x|x)(y|y) \quad \forall x, y \in H.$$

Beispiel.

Für  $H = \ell^2$  ist das die Hölder-Ungleichung.

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H–B  
Geometrische  
Versionen von H–B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

**Intermezzo:  
Hilberträume**

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Beweis für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ : ähnlich falls  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

- ▶ Klar, falls  $y = 0$ .
- ▶ Sei  $y \neq 0$ . Dann

$$0 \leq (x - \lambda y | x - \lambda y)_H = (x | x)_H + |\lambda|^2 (y | y)_H - 2 \operatorname{Re}(\bar{\lambda} (x | y)_H)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in H.$$

- ▶ Für  $\lambda = \frac{(x|y)_H}{(y|y)_H}$  gilt

$$0 \leq (x | x)_H + \frac{|(x | y)_H|^2}{(y | y)_H} - 2 \frac{|(x | y)_H|^2}{(y | y)_H} = (x | x)_H - \frac{|(x | y)_H|^2}{(y | y)_H}.$$

- ▶  $(x | x)_H \geq \frac{|(x | y)_H|^2}{(y | y)_H}$ .

$H$  Hilbertraum

Theorem. (M. Riesz &amp; M.R. Fréchet 1907)

 $\forall \phi \in H' \exists |y_\phi \in H$  s.d.

$$\langle \phi, x \rangle = (x | y_\phi)_H \quad \forall x \in H.$$

 $\gamma : H \ni y_\phi \mapsto \phi \in H'$  ist ein isometrischer

- ▶ Isomorphismus, falls  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ; bzw.
- ▶ **anti-Isomorphismus** (d.h.,  $\gamma(\alpha y_\phi) = \bar{\alpha} \gamma y_\phi$ ), falls  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

## Korollar.

Ist  $Y$  Unterraum von  $H$ , so stimmen  $Y^\perp$  und  $Y^\circ$  überein.Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Z.z.:  $\gamma : H \ni y \mapsto \gamma_y := (\cdot|y) \in H'$  ist ein isometrischer Isomorphismus.

- ▶ Cauchy–Schwarz  $\Rightarrow |\langle \gamma_y, x \rangle| = |(x|y)_H| \leq \|y\|_H \|x\|_H$  und somit  $\|\gamma_y\| \leq \|y\|_H$ .
- ▶  $\|\gamma_y x\|_H = \|y\|_H$  für  $x := \frac{y}{\|y\|_H}$ , da  $\langle \gamma_y, x \rangle = \|y\|_H$ .

Noch z.z.:  $\gamma$  ist surjektiv.

- ▶ Sei  $\phi \in H'$  mit  $\text{Ker}\phi = H$ . Damit ist  $\phi = 0 = \gamma 0$ .

- ▶ Sei nun  $\phi \in H'$  mit  $\text{Ker}\phi \neq H$ , o.B.d.A.  $\|\phi\| = 1$ . Dann ist  $H = \text{Ker}\phi \oplus \text{Ker}\phi^\perp$ .
- ▶  $\text{Ker}\phi^\perp$  ist ein abgeschlossener, 1-dimensionaler Unterraum, da  $\phi|_{\text{Ker}\phi^\perp}$  ein Isomorphismus ist.
- ▶  $\exists \xi \in \text{Ker}\phi^\perp$ , o.B.d.A.  $\langle \phi, \xi \rangle = 1$ , s.d.  $\forall z \in \text{Ker}\phi^\perp$   $z = \lambda \xi$  für ein  $\lambda \in \mathbb{K}$ .
- ▶  $x = \tilde{x} \oplus \lambda \xi \quad \forall x \in H$ .
- ▶  $\langle \phi, x \rangle = \langle \phi, \tilde{x} + \lambda \xi \rangle = \lambda \langle \phi, \xi \rangle = \lambda$
- ▶  $(x|\xi)_H = (\tilde{x} + \lambda \xi|\xi)_H = \lambda \|\xi\|_H^2$ , da  $\tilde{x} \perp \xi$ .
- ▶  $\langle \phi, x \rangle = \lambda = \frac{(x|\xi)_H}{\|\xi\|_H^2} =: (x|y_\phi)_H \quad \forall x \in H$ .
- ▶  $\gamma$  ist surjektiv.

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien**Intermezzo:  
Hilberträume**

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

## Korollar.

*Jeder Hilbertraum ist reflexiv.*

## Anmerkung.

*Nicht trivial, da es einen Raum gibt (den James-Raum, R.C. James 1951), der isomorph zu seinem Bidual ist, ohne reflexiv zu sein.*



Robert C. James  
(1918– )

Z.z.: die kanonische Einbettung  $j$  ist surjektiv.

- ▶ Riesz–Fréchet  $\Rightarrow$  der isometrischer (anti-)Isomorphismus  $\gamma$  definiert ein Skalarprodukt [ ÜA ] auf  $H'$  durch

$$(\psi|\phi)_{H'} := (\gamma^{-1}\phi|\gamma^{-1}\psi)_H.$$

- ▶  $H'$  ist also ein Hilbertraum und für ihn gilt der Riesz–Fréchet.
- ▶ Ist  $x'' \in H''$ , so  $\exists \phi \in H'$  s.d.  $\forall \psi \in H'$

$$x''(\psi) = (\psi|\phi)_{H'}$$

- ▶ Somit ist  $x''(\psi) = (\gamma^{-1}\phi|\gamma^{-1}\psi)_H =: (x|\gamma^{-1}\psi)_H$ .
- ▶ Nach Definition gilt  $(z|\gamma^{-1}\psi)_H = \langle \psi, z \rangle \forall z \in H$ .
- ▶ Also  $\exists x := \gamma^{-1}\phi \in H$  s.d.  $x''(\psi) = \langle \psi, x \rangle$ , d.h.,  $x'' = jx$ .
- ▶  $j$  ist also surjektiv.

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H–B  
Geometrische  
Versionen von H–B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

**Delio Mugnolo**

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

**Kompaktheit**

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

## Definition.

- ▶  $M$  heißt **kompakt**, falls jedes  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine (in  $M$ ) konvergente Teilfolge hat.
- ▶  $M$  heißt **relativ kompakt**, falls  $\overline{M}$  kompakt ist.
- ▶  $M$  heißt **präkompakt**, falls  $\forall \epsilon > 0 \exists M' \subset M$  s.d.
  - ▶  $M'$  endlich
  - ▶  $M \subset \bigcup_{x \in M'} B_\epsilon(x)$ .

## Anmerkung.

- ▶ Ist  $M$  kompakt, so ist  $M$  abgeschlossen.
- ▶ Ist  $M$  präkompakt, so ist  $M$  beschränkt.
- ▶ Ist  $M$  abgeschlossen und  $X$  kompakt, so ist auch  $M$  kompakt.
- ▶  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann relativ kompakt, wenn  $M$  beschränkt ist.
- ▶ Sei  $Y$  ein metrischer Raum. Sind  $f : M \rightarrow Y$  stetig und  $M$  kompakt, so ist  $f(M) \subset Y$  kompakt.

# Das Lemma von Riesz

$X$  normierter Raum

Satz. (F. Riesz 1918)

Ist  $Y$  abg. Unterraum von  $X$ ,  $Y \neq \{0\}$  und  $Y \neq X$ , so gilt  
 $\forall r < 1 \exists x_{(r)} \in X$ ,  $\|x_{(r)}\|_X = 1$ , s.d.  $\inf_{y \in Y} \|x_{(r)} - y\|_X > r$ .

Beweis.

- ▶ Sei  $x \in X \setminus Y$ .  $Y$  abgeschlossen  $\Rightarrow \inf_{y \in Y} \|x - y\|_X > 0$ .
- ▶  $\exists y_0 \in Y$  s.d.  $\|x - y_0\|_X < \frac{\inf_{y \in Y} \|x - y\|_X}{r}$
- ▶ Sei  $x_{(r)} := \frac{x - y_0}{\|x - y_0\|_X}$ , mit

$$\inf_{y \in Y} \|x_{(r)} - y\|_X = \inf_{y \in Y} \left\| \frac{x - y_0}{\|x - y_0\|_X} - y \right\|_X = \frac{1}{\|x - y_0\|_X} \inf_{y \in Y} \|x - y_0 - y\|_X.$$

- ▶ Da  $y_0 \in Y$  gilt

$$\inf_{y \in Y} \|x_{(r)} - y\|_X = \frac{1}{\|x - y_0\|_X} \inf_{y \in Y} \|x - y\|_X > r.$$

$X$  normierter Raum

**Satz.**

*Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

- (i)  $\overline{B_1(0)}$  ist kompakt.
- (ii) Ist  $C \subset X$  beschränkt und abgeschlossen, so ist  $C$  kompakt.
- (iii)  $X \simeq \mathbb{K}^n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ .

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

“(i)  $\Rightarrow$  (iii)”

- ▶  $\dim X < \infty$ , **denn sonst** betrachte  $x_1 \in X$  mit  $\|x_1\|_X = 1$  und  $Y_1 := \text{span}\{x_1\} \neq X$  (da  $\dim X = \infty$ ).
- ▶ Lemma von Riesz  $\Rightarrow \exists x_2 \in X$  s.d.  $\|x_2\|_X = 1$  und  $\|\alpha_1 x_1 - x_2\| \geq \frac{1}{2} \forall \alpha_1 \in \mathbb{K}$ . Betrachte  $Y_2 := \text{span}\{x_1, x_2\} \neq X$  (da  $\dim X = \infty$ ).
- ▶ ...
- ▶ So kann man  $x_n \in X$  wählen, s.d.

$$\|x_n\|_X \leq 1 \quad \text{und} \quad \|x_n - x_m\|_X \geq \frac{1}{2}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

- ▶  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat keine konvergente Teilfolge.  $\zeta$

“(ii)  $\Rightarrow$  (i)” klar.

“(iii)  $\Rightarrow$  (ii)” klar.

$K$  kompakter metrischer Raum

Anmerkung.

*$K$  ist vollständig, da jede Cauchy-Folge eine konvergente Teilfolge besitzt und somit selber konvergiert.*

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume**Kompaktheit**Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$(K, d)$  metrischer Raum

**Satz.**

*$K$  ist genau dann kompakt, wenn er vollständig und präkompakt ist.*

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- ▶  $K$  ist vollständig, da kompakt.
- ▶  $K$  ist präkompakt, **denn sonst**  $\exists \epsilon > 0$  s.d.  $K \not\subset \bigcup_{n=1}^N B_\epsilon(x_n)$  für beliebige endliche Familien  $(B_\epsilon(x_k))_{1 \leq k \leq N}$ .
- ▶ Definiere also rekursiv eine Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$  s.d.  $y_{n+1} \notin \bigcup_{k=1}^n B_\epsilon(y_k)$ .
- ▶ Da  $K$  kompakt hat  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  einen Häufungspunkt  $y$ .
- ▶  $\exists n < m$  s.d.  $d(y, y_n) < \frac{\epsilon}{2}$  und  $d(y, y_m) < \frac{\epsilon}{2}$ .
- ▶ Also  $\epsilon \leq d(y_n, y_m) \leq d(y_n, y) + d(y, y_m) < \epsilon$ .  $\zeta$

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H–B  
Geometrische  
Versionen von H–B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- ▶ Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ .
- ▶  $\forall \epsilon > 0 \exists y \in K$  s.d.  $x_n \in B_\epsilon(y)$  für  $\infty$  viele  $n \in \mathbb{N}$ .
- ▶ Definiere also rekursiv  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset K$  und  $J_k \subset \mathbb{N}$ ,  $J_k$  unendlich, s.d.

$$J_k \supset J_{k+1} \quad \text{und} \quad x_n \in B_{\frac{1}{k}}(y_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in J_k.$$

- ▶ Sei  $\phi(k) := k$ -tes Element von  $J_k$ , so dass  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  streng monoton wachsend ist.
- ▶  $\phi(m) \in J_k \forall m \geq k$  und somit

$$d(x_{\phi(n)}, x_{\phi(m)}) \leq d(x_{\phi(n)}, y_k) + d(y_k, x_{\phi(m)}) \leq \frac{2}{k} \quad \forall k \leq n, m.$$

- ▶  $(x_{\phi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  ist Cauchy und somit, da  $X$  vollständig, konvergent.

$X$  metrischer Raum,  $M \subset X$

**Korollar.**

*Sei  $X$  vollständig.  $M$  ist genau dann relativ kompakt, wenn  $M$  präkompakt ist.*

**Beweis.**

$M$  ist präkompakt  $\Leftrightarrow \overline{M}$  präkompakt  $\Leftrightarrow M$  relativ kompakt. □

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H–B  
Geometrische  
Versionen von H–B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume**Kompaktheit**Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$(X, d)$  metrischer Raum,  $M \subset X$ ,  $I$  Menge

Theorem. (E. Borel 1895)

$M \subset X$  ist genau dann kompakt, wenn  $\forall (O_i)_{i \in I}$  s.d.  $O_i \subset X$  offen  $\forall i \in I$  und  $M \subset \bigcup_{i \in I} O_i \exists J \subset I$  s.d.

- ▶  $J$  endlich
- ▶  $M \subset \bigcup_{j \in J} O_j$ .

“Für jede offene Überdeckung gibt es eine endliche Teilüberdeckung”.

# Beweis “ $\Rightarrow$ ”

Es sei  $(O_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung. Es reicht z.z., dass

$$(*) \quad \exists \epsilon > 0 \text{ s.d. } \forall x \in M \exists i \in I B_\epsilon(x) \subset O_i.$$

Da  $M$  präkompakt folgt dann, dass

$$\exists y_1, \dots, y_N \in M \text{ s.d. } M \subset \bigcup_{k=1}^N B_\epsilon(y_k) \subset \bigcup_{k=1}^N O_{i_k}.$$

- ▶  $(*)$  gilt, **denn sonst**  $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in M$  s.d.  $B_{\frac{1}{n}}(x_n) \not\subset O_i$ .
- ▶ Betrachte  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und sei  $x$  Häufungspunkt von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- ▶  $\exists i_0 \in I$  s.d.  $x \in O_{i_0}$  und, da  $O_{i_0}$  offen,  $\exists n \in \mathbb{N}$  s.d.  $B_{\frac{2}{n}}(x) \subset O_{i_0}$ .
- ▶  $\forall N \geq n$  s.d.  $d(x_N, x) \leq \frac{1}{n}$

$$B_{\frac{1}{N}}(x_N) \subset B_{\frac{1}{n}}(x_N) \subset B_{\frac{2}{n}}(x) \subset O_{i_0}. \quad \not\subset$$

- ▶ Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ . Dann hat  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  einen Häufungspunkt, **denn sonst**  $\forall y \in X \exists \epsilon_y > 0$  s.d.  $x_n \in B_{\epsilon_y}(y)$  nur für endlich viele  $n$ .
- ▶  $M \subset \bigcup_{y \in M} B_{\epsilon_y}(y)$  und somit  $\exists y_1, \dots, y_N \in M$  s.d.  
 $M \subset \bigcup_{k=1}^N B_{\epsilon_{y_k}}(y_k)$ .
- ▶ Somit hätte die Folge nur endlich viele Folgenglieder.  $\downarrow$
- ▶ Also hat  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  eine konvergente Teilfolge.

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

## $K$ kompakter metrischer Raum

### Anmerkung.

$K$  ist separabel, da  $\forall n \in \mathbb{N} K = \bigcup_{x \in K} B_{\frac{1}{n}}(x)$  und somit  $\exists x_1^n, \dots, x_{N_n} \in K$  s.d.  $K = \bigcup_{k=1}^{N_n} B_{\frac{1}{n}}(x_k)$ , also ist  $\{x_j^n \in K : n \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, N_n\}$  dicht in  $K$ .

Ist  $(K, d)$  kompakter metrischer Raum, so ist  $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$  ein Banachraum.

## Definition.

- $X \subset C(K)$  heißt **gleichgradig stetig** (oder **gleichstetig**) falls  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  s.d.

$$\forall f \in X \ d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

- $X \subset C(K)$  heißt **punktweise beschränkt**, falls

$$\forall x \in K \ \sup_{f \in X} |f(x)| < \infty.$$

## Anmerkung.

Ist  $Y \subset X$ ,  $X$  gleichgradig stetig bzw. punktweise beschränkt, so ist auch  $Y$  gleichgradig stetig bzw. punktweise beschränkt.

# Der Satz von Ascoli–Arzelà

$(K, d)$  kompakter metrischer Raum,  $X \subset C(K)$

Theorem. (G. Ascoli 1883 & C. Arzelà 1895)

*$X$  ist genau dann gleichgradig stetig und punktweise beschränkt, wenn  $X$  relativ kompakt ist.*

$(M, d_1), (N, d_2)$  metrische Räume,  $f : M \rightarrow N$ ,

### Definition.

$f$  heißt *gleichmäßig stetig*, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.d. } d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

### Lemma

*Ist  $M$  kompakt, so ist jedes stetige  $f : M \rightarrow N$  bereits gleichmäßig stetig.*

- ▶  $f$  ist gleichmäßig stetig, **denn sonst**

$$\exists \epsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n, y_n \in M \text{ s.d.}$$

$$d_1(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \text{ aber } d_2(f(x_n) - f(y_n)) \geq \epsilon.$$

- ▶ Da  $M$  kompakt hat  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , etwa  $x_{n_k} \rightarrow x$ .
- ▶ Somit

$$d_2(f(x_{n_k}) - f(x)) \geq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{oder} \quad d_2(f(y_{n_k}) - f(x)) \geq \frac{\epsilon}{2}.$$

- ▶ Aber  $y_{n_k} \rightarrow x$  ( $\Delta$ -Ungleichung).
- ▶ Deshalb  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$  und  $f(y_{n_k}) \rightarrow f(x)$ , da  $f$  stetig.  $\zeta$

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H–B  
Geometrische  
Versionen von H–B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- ▶  $K$  separabel (da kompakt)  $\Rightarrow \exists D := \{k_m : m \in \mathbb{N}\}$ , dicht in  $K$ .
- ▶  $\forall (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X \forall m \in \mathbb{N} (f_n(k_m))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$  ist beschränkt.
- ▶ Bolzano–Weierstraß  $\Rightarrow (f_n(k_m))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$  ist relativ kompakt.
- ▶ Diagonalfolgen-Argument  $\Rightarrow \exists \phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  streng monoton wachsend mit

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists \lim_{n \in \mathbb{N}} f_{\phi(n)}(k_m).$$

- ▶  $\overline{D} = K \Rightarrow \forall k \in K \exists \lim_{n \in \mathbb{N}} f_{\phi(n)}(k)$ .
- ▶ Grenzwertexistenz gleichmäßig in  $k \Rightarrow \exists \lim_{n \in \mathbb{N}} f_{\phi(n)}$ .

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Es reicht z.z., dass  $X$  gleichgradig stetig ist, falls  $X$  kompakt ist, da kompakte Teilmengen immer beschränkt (und insb. punktweise beschränkt) sind.

- ▶  $\forall \epsilon > 0 \exists f_1, \dots, f_N \in C(K)$  s.d.  $X \subset \bigcup_{k=1}^N B_{\frac{\epsilon}{3}}(f_k)$ , d.h.

$$\forall f \in X \exists j = 1, \dots, N \text{ s.d. } \|f - f_j\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

- ▶  $\forall x \in K \forall j = 1, \dots, N \exists \delta_j > 0$  s.d.

$$y \in B_{\delta_j}(x) \Rightarrow |f_j(x) - f_j(y)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

- ▶ Für  $\delta := \min_{1 \leq j \leq N} \delta_j$  gilt  $\forall y \in B_\delta(x) \forall f \in X$

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_j(x)| + |f_j(x) - f_j(y)| + |f_j(y) - f(y)| \leq \epsilon,$$

und somit ist  $X$  gleichgradig stetig.

- ▶ Ist  $X$  nicht abgeschlossen (also nur relativ kompakt), dann ist  $\overline{X}$  gleichgradig stetig und punktweise beschränkt und somit auch  $X$ .

$X, Y$  normierte Räume

Definition. (F. Riesz 1918)

- ▶  $T : X \rightarrow Y$  linear heißt **kompakt**, falls  $T(B_1(0))$  relativ kompakt ist; oder äquivalent, falls  $T$  beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen abbildet; oder äquivalent, falls  $T$  beschränkte Folgen auf Folgen abbildet, die eine konvergente Teilfolge besitzen.
- ▶ Der Raum der kompakten linearen Operatoren  $T : X \rightarrow Y$  ist  $\mathcal{K}(X, Y)$ .

Anmerkung.

Da relativ kompakte Mengen beschränkt sind, ist jeder kompakte Operator auch beschränkt, d.h.  $\mathcal{K}(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$ .

Banach-, normierte und metrische Räume

Analytische Versionen von H-B  
Geometrische Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume und schwache Topologien

Intermezzo: Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte Operatoren und Sobolev-Räume

# Idealeigenschaft der kompakten Operatoren

$X, Y, Z$  Banachräume

Theorem.

- ▶  $\mathcal{K}(X, Y)$  ist ein abgeschlossener Unterraum von  $\mathcal{L}(X, Y)$  und somit ein Banachraum bzgl.  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$ .
- ▶ Sind  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  und  $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$  mit  $S$  oder  $T$  kompakt, so ist auch  $ST \in \mathcal{K}(X, Z)$ .
- ▶  $\mathcal{K}(X)$  ist ein beidseitiges Ideal in  $\mathcal{L}(X)$ .
- ▶  $\mathcal{K}(X)$  ist eine Banachalgebra.

Beweis.

[ ÜA ]



$X, Y$  normierte Räume,  $T : X \rightarrow Y$  linear

Satz.

- (1) Ist  $X$  endlich-dimensional, so ist  $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ .
- (2) Ist  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  und  $\text{Rg } T$  endlich-dimensional, so ist  $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ .

Beweis.

(1)

- ▶  $T$  ist stetig.
- ▶  $T$  bildet  $\overline{B_1(0)}$  (kompakt) auf  $T(\overline{B_1(0)})$  (notwendigerweise kompakt, da Bild einer kompakten Menge unter  $T$  stetig) ab.

(2)

- ▶  $\dim \text{Rg } T < \infty \Rightarrow M \subset \text{Rg } T$  ist genau dann relativ kompakt, wenn  $M$  beschränkt ist.
- ▶  $T$  bildet beschränkte Mengen nach beschränkte Mengen ab (da  $T$  stetig).



$X, Y$  Banachräume,  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$

### Korollar.

*Gibt es  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$  mit  $\text{Rg } T_n$  endlich-dimensional  $\forall n \in \mathbb{N}$  und  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ , dann ist auch  $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ .*

### Anmerkung.

Gibt es kompakte Operatoren, die *nicht* Grenzwert einer Familien von Operatoren mit endlich-dimensionalen Bildern sind?

*Die Frage stammt aus S. Mazur 1936. Erst 1973 zeigte P. Enflo, dass solche kompakte Operatoren existieren.*

*Es gibt sogar kompakte Operatoren auf  $\ell^2$ , die diese Eigenschaft nicht haben.*

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

**Kompaktheit**

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

## Definition.

Es seien  $X, Y$  normierte Räume.  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  heißt **vollstetig**, falls für alle  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  die schwache Konvergenz von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Normkonvergenz von  $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  impliziert.

$X, Y$  normierte Räume,  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$

Satz.

- (1) *Ist  $T$  kompakt, so ist  $T$  vollstetig.*
- (2) *Ist  $X$  ein reflexiver Banachraum und  $T$  vollstetig, so ist  $T$  kompakt.*

$X, Y$  Banachräume.

### Definition.

$T : X \rightarrow Y$  heißt **schwach stetig**, falls  $T$  schwach-konvergente Folgen auf schwach-konvergente Folgen abbildet.

### Lemma

Ist  $T : X \rightarrow Y$  linear, dann sind folgende Aussage äquivalent:

- (i)  $T$  ist beschränkt.
- (ii)  $T$  ist schwach stetig.

Der Beweis ist etwas technisch: vgl. J. Conway, *A Course in Functional Analysis*, §VI.1.

# Beweis von (1)

- ▶ Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ ,  $x_n \rightarrow 0$ , also ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt, etwa  $\|x_n\|_X \leq 1$ .
- ▶  $\{Tx_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{T(B_1(0))}$ .
- ▶  $T$  kompakt  $\Rightarrow \exists (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \exists y \in Y$  s.d.  $Tx_{n_k} \rightarrow y$ .
- ▶  $T$  beschränkt  $\Rightarrow T$  schwach stetig.
- ▶  $x_n \rightarrow 0$  und  $T$  schwach stetig  $\Rightarrow Tx_n \rightarrow 0 = T0$ .
- ▶  $y = 0$  und  $0$  ist der einzige Häufungspunkt von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , also  $Tx_n \rightarrow 0$ .

## Beweis von (2)

Wir nehmen erstmal an,  $X$  sei separabel.

- ▶ Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B_1(0)$ .
- ▶  $B_1(0)$  ist schwach kompakt.
- ▶ Also  $\exists x \in X \exists (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset X$  s.d.  $x_{n_k} \rightharpoonup x$ .
- ▶  $T$  vollstetig  $\Rightarrow T x_{n_k} \rightarrow T x$ , d.h.  $T$  ist kompakt.

Im allgemeinen Fall:

- ▶ Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B_1(0)$  und  $X_1 := \overline{\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ .
- ▶  $X_1$  ist separabel und reflexiv.
- ▶  $T|_{X_1} : X_1 \rightarrow Y$  ist vollstetig, also kompakt.
- ▶  $(T x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (T|_{X_1} x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat eine konvergente Teilfolge.

$X, Y$  normierte Räume,  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$

### Satz.

Ist  $T$  kompakt und gilt  $x_n \rightarrow x$  für  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ , so ist  $Tx_n \rightarrow Tx$ .

### Beweis.

Man zeigt zuerst  $Tx_n \rightarrow Tx$ , dann  $Tx_n \rightarrow Tx$ .

- ▶ Ist  $\phi \in Y'$ , so sei  $\psi := \phi \circ T \in X'$  definiert.
- ▶  $x_n \rightarrow x \Rightarrow \langle \psi, x_n \rangle \rightarrow \langle \psi, x \rangle \Rightarrow \langle \phi, Tx_n \rangle \rightarrow \langle \phi, Tx \rangle$ , also  $Tx_n \rightarrow Tx$  (da  $\phi$  beliebig).
- ▶  $Tx_n \rightarrow Tx$ , **denn sonst**  $\exists \epsilon > 0 \exists (Tx_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  s.d.  $\|Tx_{n_k} - Tx\| \geq \epsilon$ .
- ▶  $x_n \rightarrow x \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt  $\Rightarrow (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt.
- ▶  $(Tx_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  hat eine konvergente Teilfolge  $(Tx_{n_{k_h}})_{h \in \mathbb{N}}$ , etwa  $(Tx_{n_{k_h}}) \rightarrow \tilde{y}$ .
- ▶ Somit  $\tilde{y} = Tx$ .  $\zeta$

□

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume



# Fundamentales Beispiel: Integraloperatoren

$(K, d)$  kompakter metrischer Raum

**Satz.**

*Ist der Kern  $k \in C(K \times K)$ , so ist der Fredholmsche Integraloperator*

$$T : C(K) \ni f \mapsto \int_K k(\cdot, x)f(x) dx \in C(K)$$

*ein kompakter Operator.*

Beweisskizze:

- ▶  $T$  ist linear auf  $C(K)$ .
- ▶  $T$  ist beschränkt.
- ▶  $T(B_1(0))$  ist relativ kompakt.

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

**Kompaktheit**

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# Beweis des Satzes - 1

Es reicht z.z.:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.d. } \forall f \in C(K)$$

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow |(Tf)(x) - (Tf)(y)| \leq \epsilon \|f\|_\infty,$$

dann ist  $Tf$  stetig  $\forall f \in C(K)$ .

► Es gilt

$$\begin{aligned} |(Tf)(x) - (Tf)(y)| &\leq \int_K |k(x, z)f(z) - k(y, z)f(z)| dz \\ &\leq \|f\|_\infty \int_0^1 |k(x, z) - k(y, z)| dz. \end{aligned}$$

►  $k \in C(K \times K) \Rightarrow k$  ist gleichmäßig stetig, also insbesondere  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  s.d.

$$\forall z \in K \quad d(x, y) < \delta \Rightarrow |k(x, z) - k(y, z)| \leq \epsilon.$$

►  $d(x, y) < \delta \Rightarrow |(Tf)(x) - (Tf)(y)| \leq \epsilon \|f\|_\infty.$

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

## Beweis des Satzes - 2

- ▶  $T$  ist beschränkt, denn

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \|Tf\|_\infty \\ &= \sup_{x \in K} \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} |Tf(x)| \\ &\leq \sup_{x \in K} \int_K |k(x, y)| dy \\ &\leq \|k\|_\infty.\end{aligned}$$

Noch z.z.:  $T(B_1(0))$  ist relativ kompakt.

- ▶ Insbesondere ist  $T(B_1(0))$  beschränkt.
- ▶ Schon bewiesen:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.d. } \forall f \in C(K)$$

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow |(Tf)(x) - (Tf)(y)| \leq \epsilon \|f\|_\infty,$$

also ist  $T(B_1(0))$  gleichgradig stetig.

- ▶ Ascoli-Arzelà  $\Rightarrow T(B_1(0))$  ist relativ kompakt.

## Beispiel.

- ▶ *Ist  $\dim X = \infty$ , so ist die Identität auf  $X$  nicht kompakt.*
- ▶ *Der Multiplikationsoperator*  
 $T : C([0, 1]) \ni f \mapsto \alpha f \in C([0, 1])$  *ist nicht kompakt*  
 $\forall \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .
- ▶ *Wir werden später zeigen:*  
*Ist  $q \in C([0, 1])$ ,  $q$  nicht konstant, so ist der*  
*Multiplikationsoperator*  
 $T : C([0, 1]) \ni f \mapsto q \cdot f \in C([0, 1])$  *nicht kompakt.*

# Beispiel: die Einbettungsoperatoren

## Definition.

Sind  $X, Y$  normierte Räume, mit  $Y \subset X$ .  $Y$  ist in  $X$  **stetig** bzw. **kompakt eingebettet**, falls die kanonische Einbettung

$$j : Y \ni x \mapsto x \in X$$

ein stetiger bzw. kompakter Operator ist; also wenn die Einheitskugel von  $Y$  bzgl.  $\|\cdot\|_X$  beschränkt bzw. relativ kompakt ist,  $Y \hookrightarrow X$  bzw.  $Y \overset{c}{\hookrightarrow} X$ .

## Beispiel.

Seien  $I$  ein abgeschlossenes Intervall und  $Y := C_b^k(I)$ ,  $X := C_b^h(I)$ . Dann ist die Einbettung  $Y \hookrightarrow X \forall h < k$

- ▶ kompakt, falls  $I$  beschränkt,
- ▶ stetig und nicht kompakt, falls  $I$  unbeschränkt.

[ Details: **ÜA** ]

## Beispiel.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  kompakt,  $a \in \Omega$

$$\text{Lip}(\Omega) := \{f \in C(\Omega) : \exists L_f \geq 0 \text{ s.d.}$$

$$|f(x) - f(y)| \leq L_f \|x - y\|_{\mathbb{R}^n} \forall x, y \in \Omega\}.$$

$\text{Lip}(\Omega)$  ist ein Banachraum bzgl.

$$\|f\|_{\text{Lip}} := |f(a)| + \inf L_f.$$

Dann ist  $B_1(0) \subset \text{Lip}(\Omega)$  kompakt in  $C(\Omega)$ . [ Details: **ÜA** ]

# Fundamentales Beispiel: der Satz von Pitt

Theorem. (H.R. Pitt 1936)

Für  $1 \leq q < p < \infty$  ist jedes  $T \in \mathcal{L}(l^p, l^q)$  kompakt.

O.b.d.A.  $\|T\| = 1$ .

- ▶  $\ell^p$  ist reflexiv. Es reicht also z.z.,  $T$  ist vollstetig.
- ▶ Wegen Linearität reicht es z.z., dass  $T$  schwach-Nullfolgen auf Nullfolgen Abbildet.
- ▶ Wir zeigen vorerst: Sind  $z \in c_{00}$  und  $(\tilde{z}^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \ell^r$  eine schwach-Nullfolge, so gilt

$$(*) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \|z + \tilde{z}^n\|_{\ell^r}^r = \|z\|_{\ell^r}^r + \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{z}^n\|_{\ell^r}^r,$$

da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{z}_m^n = 0 \quad \forall m \in \text{supp } z$ .

- ▶ Da  $\overline{c_{00}} = \ell^r$  und da jede Norm  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$  erfüllt, gilt  
(\*)  $\forall z \in \ell^r$ .

## Beweis [nach S. Delpéch 2009] - 2

Man hat also

$$(*) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \|z + \tilde{z}^n\|_{\ell^r}^r = \|z\|_{\ell^r}^r + \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{z}^n\|_{\ell^r}^r,$$

► Sei  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \ell^p$  schwach-Nullfolge. Z.z.:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Th_n\|_{\ell^q} = 0$ .

► Sei  $\epsilon \in (0, 1)$ . Dann  $\exists x^\epsilon \in \ell^p$  mit  $\|x^\epsilon\|_{\ell^p} = 1$  und  $1 - \epsilon < \|Tx^\epsilon\| \leq 1$ .

► Sei  $t > 0$ .  $\|T\| = 1 \Rightarrow$

$$(1) \quad \|Tx^\epsilon + T(th_n)\|_{\ell^q} \leq \|x^\epsilon + th_n\|_{\ell^p}.$$

► (\*) angewandt an (1) für  $z := Tx^\epsilon$ ,  $\tilde{z}^n := T(th_n)$  und  $r := q \Rightarrow$

$$(2) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \|Tx^\epsilon + T(th_n)\|_{\ell^q}^q = \|Tx^\epsilon\|_{\ell^q}^q + t^q \limsup_{n \rightarrow \infty} \|Th_n\|_{\ell^q}^q.$$

(\*) angewandt an (1) für  $z := x^\epsilon$ ,  $\tilde{z}^n := th_n$  und  $r := p \Rightarrow$

$$(3) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x^\epsilon + th_n\|_{\ell^p}^p = \|x^\epsilon\|_{\ell^p}^p + t^p \limsup_{n \rightarrow \infty} \|h_n\|_{\ell^p}^p.$$

## Beweis [nach S. Delpech 2009] - 3

Man hat also aus (2) & (3)

$$\left( \|Tx^\epsilon\|_{\ell^q}^q + t^q \limsup_{n \rightarrow \infty} \|Th_n\|_{\ell^q}^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left( \|x^\epsilon\|_{\ell^p}^p + t^p \limsup_{n \rightarrow \infty} \|h_n\|_{\ell^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Weil  $\|x^\epsilon\|_{\ell^p} = 1$ ,  $1 \geq \|Tx^\epsilon\|_{\ell^q} \geq 1 - \epsilon$  und  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt (da schwach-konvergent) gilt

$$\left( (1 - \epsilon)^q + t^q \limsup_{n \rightarrow \infty} \|Th_n\|_{\ell^q}^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq (1 + M^p t^p)^{\frac{1}{p}},$$

d.h.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|Th_n\|_{\ell^q}^q \leq t^{-q} \left( (1 + M^p t^p)^{\frac{q}{p}} - (1 - \epsilon)^q \right).$$

- $t$  ist noch beliebig. Für  $t = \epsilon^{\frac{1}{p}}$  gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|Th_n\|_{\ell^q}^q \leq \epsilon^{-\frac{q}{p}} \left( (1 + M^p \epsilon)^{\frac{q}{p}} - (1 - \epsilon)^q \right).$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|Th_n\|_{\ell^q}^q \leq \epsilon^{-\frac{q}{p}} \left( (1 + M^p \epsilon)^{\frac{q}{p}} - (1 - \epsilon)^q \right).$$

- Da  $(1 + x)^s \leq 1 + sx + o(s) \forall s, x > 0$  gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|Th_n\|_{\ell^q}^q \leq \epsilon^{-\frac{q}{p}} \left( 1 + \frac{q}{p} M^p \epsilon - 1 - q\epsilon + o(\epsilon) \right) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

- Also  $0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|Th_n\|_{\ell^q}^q \leq 0$ .

## Anmerkung.

*Delpech bewies auch, dass jedes  $T \in \mathcal{L}(c_0, \ell^q)$  ist kompakt  $\forall q \in [1, \infty)$ .*

*Dabei nutzt man, dass  $\ell^1 = (c_0)'$  separabel ist und somit besitzt jede beschränkte Folge in  $c_0$  eine konvergente Teilfolge.*

*[ Details: **ÜA** ]*

# Adjungierte Operatoren

$X, Y$  normierte Räume,  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$

**Definition.**

Der **zu  $T$  adjungierte Operator** ist

$$T' : Y' \ni y' \mapsto T'y' \in X',$$

wobei

$$\langle T'y', x \rangle := \langle y', Tx \rangle, \quad \forall x \in X.$$

**Anmerkung.**

- ▶  $T' \in \mathcal{L}(Y', X')$
- ▶  $(\alpha T + \beta S)' = \alpha T' + \beta S' \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$
- ▶  $(TS)' = S' T',$  falls  $S, T \in \mathcal{L}(X)$

## Beispiel.

Identifiziert man  $(\ell^p)' \simeq \ell^q$ ,  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ , so findet man für den linken Shiftoperator

$$K : \ell^p \ni (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, \dots) \in \ell^p$$

dass  $K' \in \mathcal{L}((\ell^p)')$ . Ist weiter  $y' := \gamma_{(t_n)_{n \in \mathbb{N}}}$ , also

$$\langle y', (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n t_n,$$

so gilt

$$\langle y', K(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_{n+1} t_n = \sum_{n=2}^{\infty} s_n t_{n-1} \stackrel{!}{=} \langle K' y', (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle,$$

also

$$K' : \ell^q \ni \gamma_{(x_1, x_2, \dots)} \mapsto \gamma_{(0, x_1, \dots)} \in \ell^q,$$

d.h.,  $K' = J$ , der rechte Shiftoperator.

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H–B  
Geometrische  
Versionen von H–B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$X$  normierter Raum,  $T \in \mathcal{L}(X)$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$

## Lemma

Genau dann  $\overline{(\lambda \text{Id} - T)(X)} = X$ , wenn  $\lambda \text{Id} - T'$  injektiv.

## Beweis.

“ $\Leftarrow$ ”

- ▶ Ist  $\overline{(\lambda \text{Id} - T)(X)} \neq X$ , so Hahn-Banach  $\Rightarrow \exists \phi \in X'$ ,  $\phi \neq 0$ , s.d.  
 $\phi(\lambda x - Tx) = 0 \forall x \in X$ .
- ▶ Also  $\phi \circ T = \lambda \phi$ , d.h.,  $T' \circ \phi = \lambda \phi$ .

“ $\Rightarrow$ ”

- ▶ Gelte  $\overline{(\lambda \text{Id} - T)(X)} = X$  und sei  $\phi \in X'$  s.d.  $T' \phi = \lambda \phi$ .
- ▶ Es gilt  $\phi((\lambda \text{Id} - T)x) = (\lambda \phi - T' \phi)x$ .
- ▶  $\forall x \in X \phi((\lambda \text{Id} - T)x) = (\lambda \phi - T' \phi)(x) = 0$ .
- ▶ Dichtheit von  $(\lambda \text{Id} - T)(X) \Rightarrow \phi \equiv 0$ .

□

## Korollar.

Ist  $T$  surjektiv, so ist  $T'$  injektiv.

$X$  normierter Raum,  $T \in \mathcal{L}(X)$ .

## Lemma

$T$  ist genau dann invertierbar, wenn  $T'$  invertierbar ist.

## Beweis.

“ $\Rightarrow$ ”

- ▶  $T$  invertierbar  $\Rightarrow$   
 $(T^{-1})' T' = (T \circ T^{-1})' = \text{Id} = (T^{-1} \circ T)' = T'(T^{-1})'$ , also  
 $(T')^{-1} = (T^{-1})'$ .

“ $\Leftarrow$ ”

- ▶  $T'$  invertierbar  $\Rightarrow T''$  invertierbar.
- ▶  $\|Tx\| = \|T''j(x)\| \geq \|(T'')^{-1}\|^{-1} \|j(x)\| = \|(T'')^{-1}\|^{-1} \|x\|$ :  $T$  ist injektiv.
- ▶ Somit ist  $\text{Rg } T$  abgeschlossen.
- ▶  $T'$  injektiv &  $\overline{\text{Rg}(T)} = \text{Rg}(T) \Rightarrow \text{Rg}(T) = X$ , d.h.  $T$  ist surjektiv.



Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

**Kompaktheit**

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$X, Y$  Banachräume,  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ .

Theorem. (P.J. Schauder 1930)

*$T$  ist genau dann kompakt, wenn  $T'$  kompakt ist.*

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- ▶  $K := \overline{T(B_1(0))}$  ist ein kompakter metrischer Raum.
- ▶ Sei  $(y'_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y'$  beschränkt. Dann definiert  $\phi_n := y'_{n|_K}$  eine Folge  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(K)$ .
- ▶  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt.
- ▶  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist gleichgradig stetig, da

$$|\langle \phi_n, z_1 \rangle - \langle \phi_n, z_2 \rangle| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|y'_k\| \|z_1 - z_2\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}, z_1, z_2 \in X.$$

- ▶ Ascoli-Arzelà  $\Rightarrow \exists (\phi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  glm. konv., also  $\|\phi_{n_k} - \phi_{n_h}\|_\infty \rightarrow 0$ .
- ▶  $\|T'y'_{n_k} - T'y'_{n_h}\| = \sup_{x \in B_1(0)} |\langle y'_{n_k}, Tx \rangle - \langle y'_{n_h}, Tx \rangle|$ .
- ▶ Da  $K = \overline{T(B_1(0))}$ ,

$$\|T'y'_{n_k} - T'y'_{n_h}\| = \sup_{x \in B_1(0)} |\langle y'_{n_k}, Tx \rangle - \langle y'_{n_h}, Tx \rangle| = \|\phi_{n_k} - \phi_{n_h}\|_\infty \rightarrow 0.$$

- ▶ Also konvergiert  $(T'y'_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ .

- ▶ Nach “ $\Rightarrow$ ” gilt:  $T'$  kompakt  $\Rightarrow T'' \in \mathcal{L}(X'', Y'')$  kompakt.
- ▶  $T'' \circ j_X = j_Y \circ T \in \mathcal{L}(X, Y'')$  [ ÜA ] ( $j_Y : Y \rightarrow Y''$  kanonische Einbettung)  $\Rightarrow \text{Rg}(T'' \circ j) \subset \text{Rg } j_Y$
- ▶  $j_Y : Y \rightarrow \text{Rg } j_Y$  invertierbar mit beschränkter Inverse.
- ▶  $T = j_Y^{-1} T'' j_X$
- ▶  $T''$  kompakt & Idealeigenschaft  $\Rightarrow T$  ist kompakt.

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$X$  Banachraum

**Satz.**

*Ist  $K \in \mathcal{K}(X)$  und  $T := \text{Id} - K$ , so sind  $\ker T$   
endlichdimensional und  $\text{Rg } T$  abgeschlossen.*

$X$  normierter Raum

## Lemma

Ist  $Y$  ein endlichdimensionaler Unterraum von  $X$ , so  $\exists Z$  abgeschlossener Unterraum von  $X$ , so dass

$$X = Y \oplus Z.$$

## Beweis.

- ▶ Sei  $\{y_1, \dots, y_N\}$  Basis von  $Y$ . Betrachte  $\forall i = 1, \dots, N \phi_i \in Y'$  s.d.  $\phi_i(y_j) = \delta_{ij}$ .
- ▶ Hahn–Banach  $\Rightarrow \forall i = 1, \dots, N \exists \Phi_i \in X'$  s.d.  $\Phi_i|_Y = \phi_i$ .
- ▶  $P := \sum_{i=1}^N \Phi_i(\cdot) y_i$ .
- ▶ Dann ist  $P \in \mathcal{L}(X)$ ,  $P^2 = P$  und  $\text{Rg } P = Y$ .
- ▶  $Z := (\text{Id} - P)X = \ker P$  ist ein abgeschlossener Unterraum und  $X = Y \oplus Z$ .



- ▶  $\ker T$  ist abgeschlossen und  $Kx = x \ \forall x \in \ker T \Rightarrow \text{Id}|_{\ker T}$  ist kompakt.
- ▶ Somit  $\dim \ker T < \infty$ .
- ▶  $\dim \ker T < \infty \Rightarrow X = \ker T \oplus Y$  für einen abg. Unterraum  $Y$ .
- ▶  $T|_Y$  ist injektiv mit  $\text{Rg } T = \text{Rg } T|_Y$ .

Noch z.z.:  $y \in \overline{\text{Rg } T} \Rightarrow y \in \text{Rg } T$ .

- ▶ Ist  $y \in \overline{\text{Rg } T}$ , so  $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$  mit

$$x_n - Kx_n = Tx_n \rightarrow y.$$

- ▶ Es reicht z.z.:  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt, denn dann hat  $(Kx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge  $(Kx_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  (da  $K$  kompakt). Da aber

$$x_{n_k} - Kx_{n_k} \rightarrow y,$$

konvergiert auch  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $x := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ . Somit  
 $Tx = x - Kx = y$  und  $y \in \text{Rg } T$ .

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Noch z.z.:  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt.

- ▶ **Denn sonst**  $\exists (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  s.d.  $x_{n_k} \rightarrow \infty$ .
- ▶ Für  $w_{n_k} := \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}$  gilt

$$w_{n_k} - Kw_{n_k} \rightarrow 0$$

(da  $(Tx_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  konvergent, also beschränkt ist, und somit  $\frac{Tx_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} \rightarrow 0$ ).

- ▶  $K$  kompakt  $\Rightarrow \exists (w_{n_{k_h}})_{h \in \mathbb{N}}$  s.d.  $Kw_{n_{k_h}}$  konvergiert, etwa gegen  $w \in Y$ .
- ▶  $w_{n_k} - Kw_{n_k} \rightarrow 0 \Rightarrow w_{n_{k_h}} \rightarrow w$ , also  $\|w\| = 1$ .
- ▶ Somit  $Tw = Kw - w = 0$  für  $w \in Y$ , obwohl  $T|_Y$  injektiv.  $\zeta$

$X$  Banachraum

Satz.

Ist  $K \in \mathcal{K}(X)$  und  $T := \text{Id} - K$ , so sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $T$  ist invertierbar;
- (ii)  $T$  ist injektiv;
- (iii)  $T$  ist surjektiv.

Anmerkung.

Ist  $K \in \mathcal{K}(X)$ , so ist für jeden Isomorphismus  $S \in \mathcal{L}(X)$  auch  $S^{-1}K \in \mathcal{K}(X)$  und somit gilt der Satz auch für  $(S - K) = S(\text{Id} - S^{-1}K)$ .

“(ii) $\Rightarrow$ (iii)”

- ▶  $T$  injektiv  $\Rightarrow X_1 := \text{Rg } T = T(X)$  ist ein abgeschlossener Unterraum von  $X$ .
- ▶  $X_1 = X$ , **denn sonst** definiere rekursiv  $X_n := T(X_{n-1})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- ▶  $X_n$  ist ein abgeschlossener Unterraum von  $X$ ;  $KX_n \subset X_n$  und  $TX_n \subset X_n$ .
- ▶ Weiter gilt  $X_n \subsetneq X_{n+1} \forall n$ , denn  $\exists y \in X \setminus TX$ , also  $y \neq Tx \forall x \in X$  und daher  $Ty \neq T^2x$  und  $T^h y \neq T^{h+1}x \forall x \in X$  (da  $T$  injektiv), also  $T^n y \in X_n \setminus X_{n+1}$ .
- ▶ Lemma von Riesz  $\Rightarrow \exists u_n \in X_n$  s.d.  $\|u_n\| = 1$  und  $d(u_n, X_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$ .
- ▶  $\forall m > n$  gilt dann  $Tu_n + u_m - Tu_m \in X_{n+1}$  (da  $u_n \in X_n$  und  $u_m \in X_{n+1}$  mit  $X_{n+1}$  (Id -  $K$ )-invariant).
- ▶ Somit

$$\|Ku_n - Ku_m\| = \|u_n - (Tu_n + u_m - Tu_m)\| \geq d(u_n, X_{n+1}) \geq \frac{1}{2}.$$

- ▶ Also hat  $(Ku_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine konvergent Teilfolge obwohl  $\|u_n\| \leq 1 \forall n$  und  $K \in \mathcal{K}(X)$ .  $\zeta$ .

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

**Kompaktheit**

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

“(iii) $\Rightarrow$ (ii)”

- ▶  $T$  surjektiv  $\Rightarrow T'$  injektiv.
- ▶  $K \in \mathcal{K}(X)$  und Schauder  $\Rightarrow K' \in \mathcal{K}(X')$ .
- ▶ “(ii) $\Rightarrow$ (iii)”  $\Rightarrow T'$  ist surjektiv, also invertierbar.
- ▶  $T$  ist auch invertierbar.

Seien  $K \in \mathcal{K}(X)$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  gegeben.

Dann besagt der Satz, dass für die Gleichung

$$u - \lambda Ku = f$$

die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- ▶  $\exists$  genau eine Lösung  $\forall f \in X$
- ▶  $\exists$  mindestens eine Lösung  $\forall f \in X$
- ▶  $\exists$  höchstens eine Lösung  $\forall f \in X$ .

# Die Fredholmsche Alternative

$$K \in \mathcal{K}(X), \lambda \in \mathbb{K}$$

Korollar. (I.E. Fredholm 1900, T. Hildebrandt 1928)

*Entweder hat*

$$u - \lambda Ku = f$$

*für alle  $f \in X$  genau eine Lösung, oder hat*

$$u = \lambda Ku$$

*unendlich viele Lösungen.*

# Und für nichtkompakte Operatoren $T$ ?

$X$  Banachraum,  $T \in \mathcal{L}(X)$

Definition. (D. Hilbert 1912)

Die **Resolventenmenge**  $\rho(T)$  ist die Menge

$$\rho(T) := \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{Id} - T \text{ ist invertierbar} \}.$$

Ist  $\lambda \in \rho(T)$ , so heißt  $R(\lambda, T) := (\lambda \text{Id} - T)^{-1}$  **Resolvente von  $T$**  an der Stelle  $\lambda$ .

Das **Spektrum**  $\sigma(T)$  ist die Menge

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T).$$

Anmerkung.

Satz der beschränkten Inverse  $\Rightarrow$

$\rho(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{Id} - T \text{ ist Isomorphismus} \}.$

# $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ?

Beispiel.

Die Matrix

$$T := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ hat keinen Eigenwert, falls  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , bzw.
- ▶ hat die Eigenwerte  $\pm i$ , falls  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

Es lohnt sich,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  zu betrachten, um Trivialitäten zu meiden.

# Eigenwerte

$X$  Banachraum,  $T \in \mathcal{L}(X)$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Definition. (D. Hilbert 1904)

$\lambda \in \mathbb{K}$  heißt **Eigenwert** von  $T$ , falls  $\lambda \text{Id} - T$  nicht injektiv ist, d.h. falls es einen **Eigenvektor**  $x \neq 0$  gibt, s.d.

$$Tx = \lambda x.$$

Ist  $\lambda$  Eigenwert von  $T$ , so heißt  $\ker(\lambda \text{Id} - T)$  der **mit  $\lambda$  assoziierte Eigenraum**.

Die Menge der Eigenwerte von  $T$  heißt **Punktspektrum** von  $T$ ,  $\sigma_p(T)$ .

Anmerkung.

- ▶  $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$ .
- ▶  $\sigma_p(T) = \sigma(T)$  falls  $\dim X < \infty$ .
- ▶ Ist  $\dim X = \infty$  und  $T$  nicht kompakt, so kann es sein, dass  $\sigma_p(T) \neq \sigma(T)$ : z.B. ist für  $X = \ell^p$  und  $J$  rechten Shiftoperator  $0 \in \sigma(J) \setminus \sigma_p(J)$ .

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- ▶ Sei  $0$  der Null-Operator auf  $X$  beliebig. Dann ist  $\sigma_p(0) = \{0\}$ , also ist  $X$  der einzige Eigenraum.
- ▶ Allgemein: Sei  $\mu \in \mathbb{K}$ . Dann ist  $\sigma(\mu \text{Id}) = \{\mu\}$ .
- ▶ Ist  $T \in \mathcal{L}(X)$ , so ist  $\sigma(T) = \sigma(T')$ , denn  $T$  und somit  $\lambda \text{Id} - T$  ist genau dann invertierbar, wenn  $T'$  bzw.  $(\lambda \text{Id} - T)' = \lambda \text{Id} - T'$  das ist.
- ▶ Sei  $V : C([0, 1]) \ni f \mapsto \int_0^\cdot f(s) ds$ , der **Volterra-Operator**. Dann ist  $\sigma_p(V) = \emptyset$  (Beweis durch den verallgemeinerten Fixpunktsatz von Banach) [ Details: **ÜA** ]

$X$  Banachraum,  $T \in \mathcal{L}(X)$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Satz.

- ▶  $\sigma(T) \neq \emptyset$ ,  $\sigma(T)$  ist kompakt,  $\rho(T)$  ist offen.
- ▶  $\rho(T) \ni \lambda \mapsto R(\lambda, T) \in \mathcal{L}(X)$  ist holomorph.
- ▶  $|\lambda| \leq \|T\|$  für alle  $\lambda \in \sigma(T)$ . Insbesondere: Jede Folge  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \sigma(T)$  hat eine konvergente Teilfolge.
- ▶  $(\|T^n\|^{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $r(T) := \lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ , den **Spektralradius** von  $T$ .
- ▶ Ist  $\|T\| < 1$ , so ist  $1 \in \rho(T)$  und  $(\text{Id} - T)^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} T^n$  (Neumann-Reihe).

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$X$  Banachraum,  $T \in \mathcal{L}(X)$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

### Korollar.

Sind  $\lambda_0 \in \rho(T)$  und  $\mu \in \mathbb{C}$  mit  $|\mu - \lambda_0|^{-1} > \|R(\lambda_0, T)\|$ , so ist  $\mu \in \rho(T)$  und

$$R(\mu, T) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_0 - \mu)^n R(\lambda_0, T)^{n+1}.$$

### Beweis.

- ▶  $\mu \text{Id} - T = (\mu - \lambda_0) \text{Id} + (\lambda_0 \text{Id} - T) = (\text{Id} - (\lambda_0 - \mu)R(\lambda_0, T))(\lambda_0 \text{Id} - T)$ .
- ▶  $\|(\lambda_0 - \mu)R(\lambda_0, T)\| < 1$  & Neumann-Reihe  $\Rightarrow$

$$(\text{Id} - (\lambda_0 - \mu)R(\lambda_0, T))^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_0 - \mu)^n R(\lambda_0, T)^n.$$

- ▶ Also ist  $\mu \text{Id} - T$  invertierbar und

$$R(\mu, T) = R(\lambda_0, T)(\text{Id} - (\lambda_0 - \mu)R(\lambda_0, T))^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_0 - \mu)^n R(\lambda_0, T)^{n+1}.$$

$X$  Banachraum,  $T \in \mathcal{L}(X)$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

**Korollar.**

$$\text{dist}(\lambda, \sigma(T))^{-1} \leq \|R(\lambda, T)\| \quad \forall \lambda \in \rho(T).$$

**Korollar.**

*Ist  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \rho(T)$  s.d.  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$  und  $\|R(\lambda_n, T)\| \leq M$   
 $\forall n \in \mathbb{N}$ , so ist  $\lambda_0 \in \rho(T)$ .*

$X$  Banachraum,  $T \in \mathcal{L}(X)$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

## Lemma

Sind  $\lambda, \mu \in \rho(T)$ , so gilt

$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda)R(\lambda, T)R(\mu, T).$$

*Insbesondere*

- ▶  $R(\lambda, T), R(\mu, T)$  kommutieren;
- ▶ Ist  $\mathcal{I}$  ein Operatorenideal und  $R(\lambda, T) \in \mathcal{I}$  für ein  $\lambda \in \mathbb{C}$ , so ist

$$R(\mu, T) = R(\lambda, T) + (\lambda - \mu)R(\lambda, T)R(\mu, T) \in \mathcal{I}$$

für alle  $\mu \in \rho(T)$ .

## Anmerkung.

Ist  $\mathcal{I} = \mathcal{K}(X)$ , so sagt man, dass  $T$  **kompakte Resolvente** hat. Ein  $T \in \mathcal{L}(X)$  kann aber nicht kompakte Resolvente haben, sonst wäre  $\text{Id} = R(\lambda, T)(\lambda \text{Id} - T) \in \mathcal{K}(X)$ .  $\frac{1}{2}$

- ▶  $\lambda R(\lambda, T) - TR(\lambda, T) = \text{Id}$ ,
- ▶  $(\lambda R(\lambda, T) - TR(\lambda, T))R(\mu, T) = R(\mu, T)$  und  
 $R(\lambda, T)(\mu R(\mu, T) - TR(\mu, T)) = R(\lambda, T)$ .

- ▶ Somit

$$\begin{aligned}R(\lambda, T) - R(\mu, T) &= R(\lambda, T)(\mu R(\mu, T) - TR(\mu, T)) \\ &\quad - (\lambda R(\lambda, T) - TR(\lambda, T))R(\mu, T) \\ &= \mu R(\lambda, T)R(\mu, T) - TR(\lambda, T)R(\mu, T) \\ &\quad - \lambda R(\lambda, T)R(\mu, T) + TR(\lambda, T)R(\mu, T) \\ &= \mu R(\lambda, T)R(\mu, T) - \lambda R(\lambda, T)R(\mu, T).\end{aligned}$$

- ▶ Es gilt  $R(\lambda, T)R(\mu, T) = (\mu - \lambda)^{-1}(R(\lambda, T) - R(\mu, T)) =$   
 $(\lambda - \mu)^{-1}(R(\mu, T) - R(\lambda, T)) = R(\mu, T)R(\lambda, T)$ .

$X$  Banachraum,  $T \in \mathcal{K}(X)$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

### Theorem.

*Ist  $\dim X = \infty$ , so ist  $0 \in \sigma(T)$  und jeder andere spektrale Wert ist ein Eigenwert. Weiter gilt:*

*Entweder ist  $\sigma(T)$  endlich oder  $\exists (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$  s.d.*

*$\lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \forall n \in \mathbb{N}$  und*

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

- ▶  $0 \in \sigma(T)$ , **denn sonst** wäre  $T$  Isomorphismus und somit  $\text{Id} = T^{-1}T \in \mathbb{K}(X)$  obwohl  $\dim X = \infty$ .  $\nexists$
- ▶ Ist  $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$ , so ist  $(\text{Id} - \lambda^{-1}T) = \lambda^{-1}(\lambda \text{Id} - T)$  injektiv.
- ▶ Fredholmsche Alternative  $\Rightarrow (\text{Id} - \lambda^{-1}T)$  ist ein Isomorphismus, also auch  $\lambda \text{Id} - T$ , es sei denn,  $\lambda = 0$ .

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- ▶ Dann gilt:  $\forall \epsilon > 0$  ist  $\sigma(T) \cap B_\epsilon(0)^c = \sigma_p(T) \cap B_\epsilon(0)^c$  endlich, **denn sonst** betrachte  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \sigma_p(T) \cap B_\epsilon(0)^c$ .
- ▶  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat eine konvergente Teilfolge  $(\lambda_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ . O.b.d.A.:  
 $\lambda_{n_h} \neq \lambda_{n_k} \quad \forall h \neq k$ .
- ▶ Betrachte eine Folge von assoziierten Eigenvektoren  $(e_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ .
- ▶  $\forall N \in \mathbb{N}$  ist  $\{e_{n_1}, \dots, e_{n_N}\}$  linear unabhängig.
- ▶ Sei  $X_N := \text{span}\{e_{n_1}, \dots, e_{n_N}\}$ : Lemma von Riesz  $\Rightarrow \exists u_N \in X_N$  s.d.  
 $d(u_N, X_{N-1}) \geq \frac{1}{2}$ ,  $\|u_N\| = 1$ .
- ▶  $Tu_N - \lambda_{n_N} u_N \in X_{n_{N-1}}$ , denn  $Tu_N - \lambda_{n_N} u_N =$   
 $\sum_{i=1}^N \alpha_i T e_{n_i} - \lambda_{n_N} \alpha_i e_{n_i} = \sum_{i=1}^N \alpha_i (\lambda_{n_i} - \lambda_{n_N}) \alpha_i e_{n_i} \in X_{N-1}$ .
- ▶ Also gilt  $\forall h, k, 2 \leq k < h$

$$\|\lambda_{n_h}^{-1} T u_{n_h} - \lambda_{n_k}^{-1} T u_{n_k}\| = \|\lambda_{n_h}^{-1} (T u_{n_h} - \lambda_{n_h} u_{n_h}) - \lambda_{n_k}^{-1} T u_{n_k} + u_{n_h}\| \geq \frac{1}{2},$$

da  $(T u_{n_h} - \lambda_{n_h} u_{n_h}) \in X_{h-1}$  und  $\lambda_{n_k}^{-1} T u_{n_k} \in X_k \subset X_{h-1}$ .

- ▶ Somit hat  $(T u_{n_h})_{h \in \mathbb{N}}$  keine konvergente Teilfolge obwohl  
 $T \in \mathcal{K}(X)$ .  $\zeta$

$X$  Banachraum,  $T \in \mathcal{L}(X)$

I.A. ist  $\sigma(T) \neq \sigma_p(T)$ .

### Definition.

$\lambda \in \mathbb{C}$  heißt **approximativer Eigenwert** von  $T$  falls

$\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  mit  $\|x_n\| = 1 \forall n \in \mathbb{N}$  s.d.

$$Tx_n - \lambda x_n \rightarrow 0.$$

Das **approximative Punktspektrum** von  $T$ ,  $\sigma_a(T)$ , ist die Menge aller approximativen Eigenwerte von  $T$ .

## Anmerkung.

Also ist  $\lambda \in \mathbb{C}$  genau dann **kein** approximativer Eigenwert, wenn

$$\exists \alpha > 0 \text{ s.d. } \forall x \in X \quad \|\lambda x - Tx\| \geq \alpha \|x\|.$$

Insbesondere:

- ▶ Ist  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_a(T)$ , so ist  $\lambda \text{Id} - T$  injektiv.
- ▶ Ist  $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)$ , so ist  $\lambda \text{Id} - T$  nicht surjektiv.

$X$  Banachraum,  $T \in \mathcal{L}(X)$

**Satz.**

Ist  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_a(T)$ , so ist  $\text{Rg}(\lambda \text{Id} - T)$  abgeschlossen.

**Beweis.**

- ▶ Ist  $y = \lim_n(\lambda x_n - Tx_n) \in \overline{\text{Rg}(\lambda \text{Id} - T)}$ , so ist

$$\alpha \|x_n - x_m\| \leq \|(\lambda \text{Id} - T)(x_n - x_m)\|.$$

- ▶ Also ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge, etwa gegen  $x$  konvergent.
- ▶ Somit  $y = \lim_n(\lambda x_n - Tx_n) = y = (\lambda x - Tx) \in \text{Rg}(\lambda \text{Id} - T)$ .

□

## Anmerkung.

- ▶  $\sigma_a(T) \subset \sigma(T)$ , denn für  $\lambda \in \sigma_a(T)$  ist  $\lambda \text{Id} - T$  kein Isomorphismus.
- ▶ I.A.  $\sigma_a(T) \neq \sigma(T)$ , denn für  $X = \ell^p$  und  $K$  linken Shiftoperator ist  $K$  surjektiv, also notwendigerweise  $0 \notin \sigma_a(K)$ , aber  $K$  ist nicht injektiv und somit  $0 \in \sigma(K)$ .

$X$  Banachraum,  $T \in \mathcal{L}(X)$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Satz.

$$\sigma(T) = \sigma_p(T') \cup \sigma_a(T).$$

Beweis.

- ▶ Ist  $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)$ , so ist  $\text{Rg}(\lambda \text{Id} - T)$  abgeschlossen.
- ▶ Notwendigerweise ist  $\text{Rg}(\lambda \text{Id} - T) \neq X$  und somit  $\overline{\text{Rg}(\lambda \text{Id} - T)} \neq X$ .
- ▶ Somit  $\lambda \in \sigma_p(T')$ .

□

$X$  Banachraum,  $T \in \mathcal{L}(X)$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Satz.

$\partial\sigma(T) \subset \sigma_a(T)$ .

Beweis.

- ▶ Ist  $\lambda \in \partial\sigma(T)$ , so  $\exists(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \rho(T)$  s.d.  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  aber  $\|R(\lambda_n, T)\| \rightarrow \infty$ .
- ▶ Prinzip der glm. Beschr.  $\Rightarrow \exists x \in X \exists(\lambda_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  s.d.  $\|R(\lambda_{n_k}, T)x\| \rightarrow \infty$ .
- ▶ Sei  $y_k := \frac{R(\lambda_{n_k}, T)x}{\|R(\lambda_{n_k}, T)x\|}$ . Dann ist  $\|y_k\| = 1 \forall k \in \mathbb{N}$  und

$$\lambda y_{n_k} - T y_{n_k} = (\lambda - \lambda_{n_k}) y_{n_k} + \frac{x}{\|R(\lambda_{n_k}, T)x\|} \rightarrow 0.$$

- ▶ Also  $\lambda \in \sigma_a(T)$ .

□

# Beispiel: Spektrum von Multiplikationsoperatoren

$K$  kompakter metrischer Raum,  $q \in C(K)$ ,  $K \neq \{0\}$

Satz.

$$\sigma(M_q) = q(K) := \{q(x) \in \mathbb{C} : x \in K\}.$$

Beweis.

- ▶  $(\lambda \text{Id} - M_q)f = \lambda f - q \cdot f : K \ni x \mapsto \lambda f(x) - q(x)f(x) \in \mathbb{C}$ .
- ▶  $\lambda \in \rho(M_q) \Leftrightarrow \forall g \in C(K)$

$$\lambda f(x) - q(x)f(x) = g(x), \quad x \in K,$$

eindeutig lösbar ist.

- ▶ Da die Lösung notwendigerweise durch

$$f : K \ni x \mapsto (\lambda - q(x))^{-1}g(x) \in \mathbb{K}$$

gegeben ist, ist  $\lambda \in \rho(M_q) \Leftrightarrow (\lambda - q(x)) \neq 0 \forall x \in K$ , d.h.,  $\Leftrightarrow \lambda \notin q(K)$ .

# Nichtkompaktheit von Multiplikationsoperatoren

$K$  kompakter metrischer Raum

**Korollar.**

*Ist  $q \in C(K)$  nicht konstant, so ist  $M_q$  nicht kompakt.*

**Beweis.**

- ▶ Ist  $q$  nicht konstant, so ist  $q(K)$  nicht abzählbar.
- ▶ Da  $\sigma(M_q) = q(K)$  kann der Operator nicht kompakt sein.

□

**Korollar.**

*Ist  $q \in C(K)$ , so ist  $M_q$  nicht kompakt.*

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

**Allgemeine  
spektrale Theorie**

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# Weitere Teile vom Spektrum

$X$  Banachraum,  $T \in \mathcal{L}(X)$

## Definition.

- Das *kontinuierliche Spektrum* ist die Menge

$$\sigma_c(T) := \left\{ \lambda \in \sigma(T) : \ker(\lambda \text{Id} - T) = \{0\} \right. \\ \left. \text{und } \overline{\text{Rg}(\lambda \text{Id} - T)} = X \right\}.$$

- Das *Residualspektrum* ist die Menge

$$\sigma_r(T) := \left\{ \lambda \in \sigma(T) : \ker(\lambda \text{Id} - T) = \{0\} \right. \\ \left. \text{und } \overline{\text{Rg}(\lambda \text{Id} - T)} \neq X \right\}.$$

Also gilt:

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \dot{\cup} \sigma_c(T) \dot{\cup} \sigma_r(T).$$

## Beispiel.

Für  $X = \ell^2$  und  $J$  den rechten Shiftoperator gilt

- ▶  $\sigma(J) = \overline{B_1(0)}$ ,
- ▶  $\sigma_p(J) = \emptyset$ ,
- ▶  $\sigma_c(J) = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| = 1\}$ , denn für  $|\lambda| = 1$  lassen sich die Basisvektoren  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  durch Elemente von  $\text{Rg}(\lambda \text{Id} - J)$  approximieren und dann kann man für jedes  $y \in \ell^2$  ein  $x \in c_{00}$  angeben, für den  $(\lambda \text{Id} - J)x = y$ .
- ▶  $\sigma_r(J) = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| < 1\}$ , denn für  $|\lambda| < 1$  und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} := (\bar{\lambda}^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \perp \text{Rg}(\lambda \text{Id} - J)$  und somit  $\text{Rg}(\lambda \text{Id} - J) = X$ .

[ Details: **ÜA** ]

## Beispiel.

### Der Ortsoperator

$$f \mapsto \text{id} \cdot f$$

hat

- ▶ *reines Punktspektrum als Operator auf  $B([0, 1])$  und*
- ▶ *reines Residualspektrum als Operator auf  $C([0, 1])$ .*

[ Details: **ÜA** ]

## Satz.

$$\sigma_r(T) \subset \sigma_p(T') \subset \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T).$$

## Beweis.

“ $\sigma_r(T) \subset \sigma_p(T')$ ”

- ▶ Sei  $\lambda \in \sigma_r(T)$ , also sei  $\overline{\text{Rg}(\lambda \text{Id} - T)} \neq X$ .
- ▶ Hahn-Banach  $\Rightarrow \exists \phi \in X' \setminus \{0\}$  mit  $\langle \phi, y \rangle = 0 \ \forall y \in \text{Rg}(\lambda \text{Id} - T)$ , also

$$\langle (\lambda \text{Id} - T')\phi, x \rangle = \langle \phi, (\lambda \text{Id} - T)x \rangle = 0, \quad \forall x \in X.$$

- ▶ Also  $\lambda \in \sigma_p(T')$ .

“ $\sigma_p(T') \subset \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)$ ”

- ▶ Sei  $\lambda \in \sigma_p(T')$ , also sei  $\langle \lambda\phi - T'\phi, x \rangle = \langle \phi, \lambda x - Tx \rangle = 0$  für ein  $\phi \in X'$ ,  $\phi \neq 0$ ,  $\forall x \in X$ .
- ▶ Entweder ist  $\text{Rg}(\lambda \text{Id} - T)$  nicht dicht in  $X$ , d.h.,  $\lambda \in \sigma_r(T)$ , oder, falls  $\text{Rg}(\lambda \text{Id} - T)$  dicht in  $X$  ist, dann ist  $\lambda x - Tx = 0$  und somit  $\lambda \in \sigma_p(T)$ , **denn sonst** wäre  $\phi = 0$ .  $\zeta$



$(\Omega, \mu)$  Maßraum

Zur Erinnerung:

Ist  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  eine messbare Funktion, dann gilt:

- ▶  $f$  ist genau dann integrierbar,  $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ , wenn  $\int_{\Omega} |f| d\mu < \infty$ .
- ▶  $\int_{\Omega} f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$   $\mu$ -f.ü.
- ▶  $f$  ist monotoner Grenzwert einer Folge einfacher messbaren Funktionen.

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$(\Omega, \mu)$  Maßraum

Ferner gilt:

- **Satz der monotonen Konvergenz** oder **von Beppo Levi**: Sind  $f_n : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  messbar mit  $f_n \leq f_{n+1}$   $\mu$ -f.ü.,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Sei  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in [0, +\infty]$ . Dann ist  $f$  messbar und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu.$$

- **Lemma von Fatou**: Sind  $f_n : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  messbar mit  $f(x) := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$   $\mu$ -f.ü.,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . So ist  $f$  messbar und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu \geq \int_{\Omega} f d\mu.$$

- **Satz der dominierten Konvergenz** oder **von Lebesgue**: Sind  $f_n : \Omega \rightarrow (-\infty, \infty]$  integrierbar mit  $|f_n| \leq g$   $\mu$ -f.ü.,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , für ein  $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ . Konvergiert  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$   $\mu$ -f.ü. gegen  $f : \Omega \rightarrow (-\infty, \infty]$  messbar, so ist  $f$  integrierbar und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu.$$

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Delio Mugnolo

$(\Omega, \mu)$  Maßraum

- ▶ Die Abbildung

$$\mathcal{L}^1(\Omega, \mu) \ni f \mapsto \int_{\Omega} f \, d\mu \in \mathbb{K}$$

ist linear.

- ▶ Ist  $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ , so gilt

$$\left| \int_{\Omega} f \, d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f| \, d\mu$$

- ▶ Sind  $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$  mit  $f \leq g$   $\mu$ -f.ü., so gilt

$$\int_{\Omega} f \, d\mu \leq \int_{\Omega} g \, d\mu.$$

- ▶ Für  $\Omega = \mathbb{R}^N$  ist  $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$  dicht in  $L^1(\mathbb{R}^N)$ .

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# $\mathcal{L}^p$ -Räume

$(\Omega, \mu)$  Maßraum

**Definition.**

Für  $p \in (0, \infty)$

$$\|f\|_p := \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \text{ messbar s.d. } \|f\|_p < \infty\}.$$

**Anmerkung.**

- ▶ *Lebesgue-Integrale einer Funktion bzgl. einem allgemeinen Maß!*  
 *$\ell^p$ -Räume sind somit ein Spezialfall.*
- ▶  $f \in \mathcal{L}^p \Leftrightarrow f^p \in \mathcal{L}^1$ .

## Satz.

Für alle  $p \in (0, \infty)$  ist  $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$  ein Vektorraum.

## Beweis.

- ▶ Sind  $f, g$  messbar, so ist  $|f + g|^p$  messbar.
- ▶ Es gilt für ein  $K > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f + g|^p d\mu &\leq K \int_{\Omega} (|f| + |g|)^p d\mu \\ &\leq K \int_{\Omega} (2 \max\{|f|, |g|\})^p d\mu \\ &= 2^p K \int_{\Omega} (\max\{|f|, |g|\})^p d\mu \\ &\leq 2^p K \int_{\Omega} (|f|^p + |g|^p) d\mu \\ &= 2^p K (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) < \infty. \end{aligned}$$

- ▶ Analog zeigt man  $f \in \mathcal{L}^p(\Omega) \Rightarrow \lambda f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$$\mathcal{L}^p \neq \mathcal{L}^q$$

I.A. ist  $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) \neq \mathcal{L}^q(\Omega, \mu)$  falls  $p \neq q$ ,  $p, q \in (1, \infty)$ .



$$x \mapsto x^{\epsilon-1}$$

ist integrierbar  $\forall \epsilon > 0$ , aber nicht integrierbar  $\forall \epsilon \leq 0$ . Somit sieht man, dass

$$x \mapsto x^{-\frac{1}{q}}$$

in  $\mathcal{L}^p(0, 1) \setminus \mathcal{L}^q(0, 1)$  liegt  $\forall p < q$ .



$$x \mapsto (x \log^2(x/2))^{-1}$$

liegt in  $\mathcal{L}^1(0, 1) \setminus \mathcal{L}^q(0, 1)$  für alle  $q > 1$ .

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume $(\Omega, \mu)$  Maßraum

Definition.

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty &:= \inf\{c \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq c \mu - f.\ddot{u}.\} \\ &= \inf_{\substack{A \in \Sigma \\ \mu(A)=0}} \sup_{x \in \Omega \setminus A} |f(x)|,\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \text{ messbar s.d. } \|f\|_\infty < \infty\}.$$

$(\Omega, \mu)$  Maßraum

## Lemma

Genau dann ist  $f \in \mathcal{L}^\infty$ , wenn

$$f(x) \leq \|f\|_\infty \quad \mu - f.\ddot{u}.$$

D.h., tatsächlich ist

$$\|f\|_\infty = \min_{\substack{A \in \Sigma \\ \mu(A)=0}} \|f|_{\Omega \setminus A}\|.$$

## Beweis.

- ▶  $\forall k \in \mathbb{N}$  sei  $A_k := \{x \in \Omega : f(x) \geq \|f\|_\infty + \frac{1}{k}\}$ .
- ▶  $\forall k \in \mathbb{N} \quad \mu(A_k) = 0$ .
- ▶  $\mu(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = 0$ , wobei

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \{x \in \Omega : f(x) > \|f\|_\infty\}.$$



## Anmerkung.

- ▶  $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$   $\mu$ -f.ü., und somit ist  $\|\cdot\|_\infty$  keine Norm.
- ▶ Allerdings ist  $\|\cdot\|_\infty$  homogen und erfüllt die Dreiecksungleichung.  
[ ÜA ]

$(\Omega, \mu)$  Maßraum

Satz.

$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu)$  ist ein Vektorraum.

Beweis.

- ▶ Sind  $f, g$  messbar, so ist  $f + g$  messbar.
- ▶ Gilt es  $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$  und  $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$   $\mu$ -f.ü., so ist  
 $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty < \infty$   $\mu$ -f.ü.
- ▶ Gilt es  $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$   $\mu$ -f.ü., so ist  
 $|\lambda f(x)| = |\lambda| |f(x)| \leq |\lambda| \|f\|_\infty < \infty$   $\mu$ -f.ü.

□

Anmerkung.

Ist  $f \in C([0, 1]) \subset \mathcal{L}^\infty(0, 1)$ , so stimmen die  $\mathcal{L}^\infty$ -Norm und die  $C([0, 1])$ -Norm von  $f$  überein.

$(\Omega, \mu)$  Maßraum,  $f, g : \Omega \rightarrow (-\infty, +\infty]$  messbar

Lemma (L.J. Rogers 1888, O. Hölder 1889)

Für  $p, q \in [1, \infty]$  mit  $p^{-1} + q^{-1} = 1$  gilt

$$(*) \quad \|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

(Diese Ungleichung wird zu einer Gleichung, falls  $g = |f|^{\frac{p-1}{1}}$ ).

Erst für  $p \in (1, \infty)$

- ▶  $f \cdot g$  ist messbar.
- ▶ Klar falls  $\|f\|_p = +\infty$  oder  $\|g\|_q = +\infty$ .
- ▶ Klar für alle  $f, g$ , falls (\*) für  $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$  gilt.
- ▶ Also z.z.: (\*) für alle  $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$  mit  $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ .
- ▶ Da  $ab \leq p^{-1}a^p + q^{-1}b^q \forall a, b \geq 0$  (schon bekannt), gilt es auch (mit  $a := |f(x)|$  und  $b := |g(x)|$ )

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x)||g(x)| d\mu(x) &\leq p^{-1} \int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu + q^{-1} \int_{\Omega} |g(x)|^q d\mu \\ &= p^{-1} + q^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Nun zu  $p = 1$ ,  $q = \infty$  (oder analog zu  $q = 1$  und  $p = \infty$ )

- ▶  $f \cdot g$  ist messbar.
- ▶ Ist  $A \in \Sigma$  mit  $\mu(A) = 0$ , so gilt  $\int_{\Omega} |f g| d\mu = \int_{\Omega \setminus A} |f g| d\mu$ .
- ▶ Somit  $\forall A \in \Sigma$  mit  $\mu(A) = 0$  gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f g| d\mu &\leq \left( \int_{\Omega \setminus A} |f| d\mu \right) \sup_{x \in \Omega \setminus A} |g(x)| \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |f| d\mu \right) \sup_{x \in \Omega \setminus A} |g(x)| \\ &= \|f\|_1 \sup_{x \in \Omega \setminus A} |g(x)|. \end{aligned}$$

- ▶ Schließlich

$$\int_{\Omega} |f g| d\mu \leq \|f\|_1 \inf_{\substack{A \in \Sigma \\ \mu(A)=0}} \sup_{x \in \Omega \setminus A} |g(x)| = \|f\|_1 \|g\|_{\infty}.$$

# Verallgemeinerte Höldersche Ungleichung

$(\Omega, \mu)$  Maßraum,  $f_1, \dots, f_n : \Omega \rightarrow (-\infty, +\infty]$  messbar

**Korollar.**

Für  $p_1, \dots, p_n \in [1, \infty]$  mit  $p_1^{-1} + \dots + p_n^{-1} = 1$  gilt

$$\|f_1 \cdot \dots \cdot f_n\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \cdot \dots \cdot \|f_n\|_{p_n}.$$

**Beweis.**

[ ÜA ]



Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$$\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^r$$

$(\Omega, \mu)$  Maßraum,  $p, r \in [1, \infty]$

**Korollar.**

Ist  $\mu(\Omega) < \infty$ , so ist  $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) \subset \mathcal{L}^r(\Omega, \mu)$  für alle  $p \geq r$ .

**Beweis.**

- ▶ Sind  $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$  und  $g := 1 \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mu)$  mit  $q^{-1} = r^{-1} - p^{-1}$
- ▶  $\|f\|_r = \|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q = (\mu(\Omega))^{\frac{1}{q}} \|f\|_p < \infty$ .

□

**Anmerkung.**

Ist  $\mu(\Omega) = \infty$ , so gilt diese Inklusion nicht.

# Minkowskische Ungleichung

$(\Omega, \mu)$  Maßraum,  $f, g : \Omega \rightarrow (-\infty, +\infty]$  messbar

Korollar. (H. Minkowski 1896)

Für  $p \in [1, \infty]$  gilt  $\forall f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ .

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Beweis.

[ ÜA ]



$\Rightarrow \|\cdot\|_p$  auf  $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$  erfüllt die Dreiecksungleichung  
 $\forall p \in [1, \infty]$ .

## Lemma

Ist  $f \in \bigcap_{1 \leq p \leq \infty} \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ , so gilt

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Beweis.

[ ÜA ]



## Anmerkung.

Ist  $p \in (0, 1)$ , so erfüllt  $\|\cdot\|_p$  die Minkowskische Ungleichung (d.h. die Dreiecksungleichung) nicht.

$\|\cdot\|_p$  ist somit keine Norm.

Allerdings definiert

$$d_p(f, g) := \|f - g\|_p$$

auch für  $p \in (0, 1)$  eine Metrik.

$\|\cdot\|_p$  definiert *keine* Norm auf  $\mathcal{L}^p$ , denn  $\|f\|_p = 0 \not\Rightarrow f \equiv 0$ .  
Es kann sein, dass  $f \neq 0$  auf einer Nullmenge.

**Idee:** betrachte Funktionen bis auf Ihre Werte auf Nullmengen.

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$X$  Banachraum,  $Y$  abgeschlossener Unterraum von  $X$

Satz.

$$\|[x]\|_{X/Y} := \|x + Y\|_X = \inf\{\|x + y\| : y \in Y\}, \quad x \in X/Y$$

*definiert eine Norm und der Quotientenraum  $X/Y$  ist ein Banachraum bzgl. dieser Norm.*

**Idee:** Definiere  $L^p(\Omega, \mu) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mu) / N$ , wobei  
 $N := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} : f = 0 \mu - \text{f.ü.}\}$ .

**Problem:**  $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$  ist kein normierter Raum.

$X$  Vektorraum

Definition.

Eine **Halbnorm**  $\|\cdot\|$  auf  $X$  ist  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  s.d.

$$(1) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$$

$$(2) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\forall x, y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$$

$(X, \|\cdot\|)$  heißt dann **halbnormierter Raum**.

Es folgt aus der Minkowskischen Ungleichung:

Korollar.

$\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$  ist ein halbnormierter Vektorraum  $\forall p \in [1, \infty]$ .

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Jedoch:

$(X, \|\cdot\|)$  vollständiger halbnormierter Raum,

$$N := \ker \|\cdot\| = \{x \in X : \|x\| = 0\}$$

Satz.

$$\|[x]\|_{X/N} := \|x + N\|_X = \inf\{\|x + y\| : y \in N\}, \quad x \in X/N$$

*definiert eine Norm. Der Quotientenraum  $X/N$  ist ein Banachraum bzgl. dieser Norm, falls  $X$  vollständig ist.*

## Lemma

$\|[\cdot]\|$  ist wohl definiert und

$$\|[x]\| = \|x\| \quad \forall x \in X.$$

## Beweis.

- ▶  $[x] = [z]$  für  $x, z \in X \Rightarrow x = z + y_0$  für ein  $y_0 \in N$ , also

$$\|[x]\| = \inf\{\|x + y\| : y \in N\} = \inf\{\|z + y\| : y \in N\} = \|[z]\|.$$

- ▶  $\|[x]\| \leq \|x + 0\| = \|x\|.$

- ▶  $\forall y \in N$

$$\|x\| \leq \|x + y\| + \|y\| = \|x + y\|$$

und somit

$$\|x\| \leq \inf\{\|x + y\| : y \in N\} = \|[x]\|.$$



Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- ▶ **Positiv Definitheit:** Ist  $x \in X$  mit  $\|[x]\| = 0$ , so gilt  $\|x\| = 0$  und somit  $x \in N$ , d.h.  $[x] = [0]$ .

- ▶ **Homogenität:** klar für  $\lambda = 0$  und für  $\lambda \neq 0$  und  $x \in X$  gilt

$$\|[\lambda x]\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| = |\lambda| \|[x]\|.$$

- ▶ **Dreiecksungleichung:** Seien  $x, z \in X$ , so gilt

$$\|[x] + [z]\| = \|x + z\| \leq \|x\| + \|z\| = \|[x]\| + \|[z]\|.$$

- ▶ **Vollständigkeit:** Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  s.d.  $([x_n])_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy ist, so ist auch  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy.

- ▶  $X$  vollständig  $\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent, d.h.  $\exists x \in X$  mit  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$  und somit  $\|[x_n] - [x]\| = \|[x_n - x]\| = \|x_n - x\| \rightarrow 0$ .

# Lebesgue- $L^p$ -Räume, $0 < p < \infty$

$(\Omega, \mu)$  Maßraum,  $p \in (0, \infty)$

Sei

$$\begin{aligned} N_p &:= \ker \|\cdot\|_p \\ &= \{f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu) : \|f\|_p = 0\} \end{aligned}$$

**Definition.**

$$L^p(\Omega, \mu) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mu) / N_p.$$



Henri Léon Lebesgue  
(1875–1941)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$  offen

$L^p(\Omega) := L^p(\Omega, \mu)$  mit  $\mu \equiv \lambda$  Lebesgue-Maß.

$L^p_{loc}(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} : f|_{\omega} \in L^1(\omega) \forall \omega \subset \Omega \text{ kompakt}\}.$

- ▶  $L^p_{loc}$  ist ein Vektorraum aber kein normierter Raum.
- ▶  $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \forall p \in [1, \infty]$ .

Delio Mugnolo

$(\Omega, \mu)$  Maßraum

**Satz.**

*Für alle  $p \in (0, \infty]$  ist  $L^p(\Omega, \mu)$  ein vollständiger metrischer Raum.*

**Korollar.**

*Für alle  $p \in [1, \infty]$  ist  $L^p(\Omega, \mu)$  ein Banachraum.*

Wir zeigen, dass  $\mathcal{L}^p$  vollständig ist,  $\forall p \in [1, \infty]$ .

**Idee:** Betrachte eine Cauchy-Folge in  $\mathcal{L}^p$ , betrachte die Folgen ihrer punktwise Auswertungen und nutze die Vollständigkeit von  $\mathbb{K}$ .

**Problem:** Die Folgen der Auswertungen müssen nicht überall konvergieren.

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H–B  
Geometrische  
Versionen von H–B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# Beweis für $p \in [1, \infty) - 1$

- ▶ Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega, \mu)$  eine Cauchy-Folge.

Es reicht z.z.,  $\exists (f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  konvergent.

- ▶ Somit  $\exists (f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega, \mu)$  konvergent, etwa mit

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 2^{-n}.$$

Z.z.:  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert in  $L^p(\Omega, \mu)$ .

- ▶ Sei

$$g_m : \Omega \ni x \mapsto \sum_{k=1}^m |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \in [0, +\infty).$$

Dann ist  $g_n$  messbar,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , und  $g_n \leq g_{n+1}$ .

- ▶ Da  $\|g_m\|_p \leq \sum_{k=1}^m 2^{-k} < 1$  ist  $g_m \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu) \forall m \in \mathbb{N}$ .

- ▶ Sei

$$g(x) := \sup_{m \in \mathbb{N}} (g_m(x))_{m \in \mathbb{N}} \in [0, +\infty].$$

Beppo Levi  $\Rightarrow g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ , mit  $g(x) \in [0, \infty)$   $\mu$ -f.ü.

$g$  kann als dominierende Funktion dienen, um Lebesgue anzuwenden.

Beweis für  $p \in [1, \infty) - 2$ 

- Für  $n_h \geq n_k \geq 2$  gilt

$$\begin{aligned} |f_{n_h}(x) - f_{n_k}(x)| &\leq |f_{n_h}(x) - f_{n_{h-1}}(x)| + \dots + |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \\ &\leq \sum_{\ell=k}^{h-1} |f_{n_{\ell+1}}(x) - f_{n_{\ell}}(x)| \\ &\leq g(x) - g_{k-1}(x). \end{aligned}$$

- $(g_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$  konvergent  $\Rightarrow (f_{n_k}(x))_{k \in \mathbb{N}}$  ist Cauchy-Folge  $\mu$ -f.ü.
- Vollständigkeit von  $\mathbb{K} \Rightarrow (f_{n_h}(x))_{h \in \mathbb{N}}$  konvergiert, etwa gegen  $f(x) \in [0, +\infty)$   $\mu$ -f.ü.
- $f$  ist punktweise Grenzwert messbarer Funktionen  $\Rightarrow f$  ist messbar und  $\forall h \in \mathbb{N}$

$$|f_{n_h}(x) - f(x)| \leq g_{n_{h-1}}(x) - g(x) \leq g(x) \quad \mu - \text{f.ü.}$$

- Somit für  $h$  groß

$$|f_{n_h}(x) - f(x)|^p \leq g(x)^p \quad \mu - \text{f.ü.}$$

- $|f| \leq |f - f_{n_h}| + |f_{n_h}|$ , also  $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ .
- Da  $|f_{n_h}(x) - f(x)|^p \rightarrow 0$  und  $|f_{n_h} - f|^p \leq g^p \in L^1(\Omega, \mu)$ ,  
Lebesgue  $\Rightarrow$  Aussage.

Beweis für  $p = \infty$ 

- ▶ Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu)$  eine Cauchy-Folge.
- ▶  $\forall k \in \mathbb{N} \exists N_k \in \mathbb{N}$  s.d.

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq \frac{1}{k} \quad \forall m, n \geq N_k.$$

- ▶ Somit  $\exists A_k$  mit  $\mu(A_k) = 0$  s.d.

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall m, n \geq N_k, \forall x \in \Omega \setminus A_k.$$

- ▶ Auch für  $A := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$  gilt  $\mu(A) = 0$  und  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$  ist eine Cauchy-Folge,  $\forall x \in \Omega \setminus A$ .
- ▶ Vollständigkeit von  $\mathbb{K} \Rightarrow (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$  konvergiert  $\forall x \in \Omega \setminus A$ .
- ▶ Sei

$$f := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) & x \in \Omega \setminus A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- ▶  $f$  ist punktweise Grenzwert messbarer Funktionen  $\Rightarrow f$  ist messbar und

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \|(f_n - f)|_{\Omega \setminus A}\|_\infty \leq \frac{1}{k} \quad \forall n \geq N_k.$$

- ▶ Somit  $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu)$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$ .

$(\Omega, \mu)$  Maßraum

Insbesondere hat man bewiesen:

**Korollar.**

*Ist  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega, \mu)$  konvergent, so  $\exists (f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , so dass  $(f_{n_k}(x))_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$  konvergiert ( $\mu$ -f.ü.).*

$(\Omega, \mu)$  Maßraum

**Korollar.**

$L^2(\Omega, \mu)$  ist ein Hilbertraum bzgl.

$$(f|g) := \int_{\Omega} f \bar{g} \, d\mu.$$

**Beweis.**

- ▶ Positiv Definitheit: direkt aus der positiv Definitheit der Norm  $\|\cdot\|_2$ .
- ▶ Riesz–Fischer  $\Rightarrow$  Vollständigkeit.

□

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie **$L^p$ -Räume**Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Wir werden die Reflexivität der  $L^p$ -Räume untersuchen.  
Dazu benötigen wir die Konvexität von  $\|\cdot\|_p$  zu untersuchen.

# Gleichmäßig konvexe Räume

$X$  normierter Raum

Definition. (J.A. Clarkson 1936)

- $X$  heißt **strikt konvex**, falls  $\forall x, y \in X$

$$\|x\|_X = \|y\|_X = \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_X \Rightarrow x = y.$$

- $X$  heißt **gleichmäßig konvex**, falls  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  s.d.  
 $\forall x, y \in X$

$$\|x\|_X = \|y\|_X = 1 \text{ und } \|x-y\|_X > \epsilon \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_X < 1-\delta.$$

Anmerkung.

Ist  $X$  gleichmäßig konvex, so ist  $X$  auch strikt konvex.

- ▶  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$  ist nicht strikt konvex: betrachte  $x := (1, 0)$  und  $y := (0, 1)$ .
- ▶  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$  ist nicht strikt konvex: betrachte  $x := (1, 1)$  und  $y := (1, -1)$ .
- ▶ Jeder Prähilbertraum ist gleichmäßig konvex: laut dem Parallelogrammgesetz  $\|x\| = \|y\| = 1 \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_X^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|_X^2 = 2$ .

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$X$  Banachraum

Theorem. (D. Milman 1938 & B.J. Pettis 1939)

*Ist  $X$  gleichmäßig konvex, so ist  $X$  reflexiv.*

# Vorbereitendes Resultat: der Satz von Helly

$X$  normierter Vektorraum,  $\phi_1, \dots, \phi_n \in X'$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

Satz.

*Folgende Aussagen sind äquivalent.*

- (a)  $\forall \epsilon > 0 \exists x \in X$  mit  $\|x\|_X \leq 1 + \epsilon$  s.d.  $\phi_i(x) = \alpha_i$   
 $\forall i = 1, \dots, n$ .
- (b)  $\forall (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i \mid \leq \|\sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i\|$ .

# Beweis des Satzes von Helly - “(a) $\Rightarrow$ (b)”

- ▶ Seien  $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ ,  $\epsilon > 0$ . Sei  $x \in X$  mit  $\|x\|_X \leq 1 + \epsilon$  s.d.  $\phi_i(x) = \alpha_i \forall i = 1, \dots, n$ .
- ▶ Somit

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \beta_i \alpha_i \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \beta_i \phi_i(x) \right| \\ &\leq \left\| \sum_{k=1}^n \beta_i \phi \right\| \|x\|_X \\ &\leq \left\| \sum_{k=1}^n \beta_i \phi \right\| (1 + \epsilon). \end{aligned}$$

- ▶  $\epsilon > 0$  beliebig  $\Rightarrow$

$$\left| \sum_{k=1}^n \beta_i \alpha_i \right| \leq \left\| \sum_{k=1}^n \beta_i \phi \right\|.$$

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# Beweis des Satzes von Helly - "(a) $\Leftrightarrow$ (b)" - 1

- ▶ O.B.d.A.:  $\phi_1, \dots, \phi_n$  sind linear unabhängig.
- ▶ Dann ist  $\phi : X \ni x \mapsto (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)) \in \mathbb{K}^n$  linear und stetig.
- ▶  $\phi$  ist surjektiv, **denn sonst**: ist der Unterraum  $\phi(X) \subsetneq \mathbb{K}^n$ , so  $\exists \beta \in (\mathbb{K}^n)'$  s.d.

$$\sum_{j=1}^n \beta_j \phi_j(x) = \langle \beta, \phi(x) \rangle = 0 \quad \forall x \in X. \quad \nexists$$

- ▶ Satz über die offene Abbildung  $\Rightarrow \phi(B_{1+\epsilon}(0))$  ist offen  $\forall \epsilon > 0$ .
- ▶ Dann  $\forall \epsilon > 0 \exists x \in X$  mit  $\|x\|_X \leq 1 + \epsilon$  s.d.

$$\phi_i(x) = \alpha_i \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

**denn sonst:**

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# Beweis des Satzes von Helly - “(a) $\Leftrightarrow$ (b) ” - 2

- ▶ Gilt die Aussage nicht, d.h., ist  $\alpha \notin \phi(B)$ .
- ▶ Hahn–Banach  $\Rightarrow \exists \psi \in (\mathbb{K}^n)'$  s.d.

$$\operatorname{Re} \psi(\phi(x)) \leq \operatorname{Re} \psi(a) \leq |\psi(a)| \quad \forall x \in B.$$

- ▶ Durch Ersetzen  $x \rightarrow xe^{i\theta}$  gilt

$$|\psi(\phi(x))| \leq |\psi(a)| \quad \forall x \in B.$$

- ▶  $\exists \beta \in \mathbb{K}^n$  s.d.

$$\psi(y) = \sum_{j=1}^n \beta_j y_j \quad \forall y \in \mathbb{K}^n.$$

- ▶ Dann ist  $\forall x \in X$  mit  $\|x\| < 1 + \epsilon$

$$\left| \sum_{j=1}^n \beta_j \phi_j(x) \right| \leq \left| \sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_j \right|.$$

- ▶ Also:

$$(1 + \epsilon) \left\| \sum_{j=1}^n \beta_j \phi_j \right\| \leq \left| \sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_j \right|. \quad \zeta$$

$X$  normierter Raum

## Lemma

$X$  ist genau dann gleichmäßig konvex, wenn für alle

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\|_X &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\|_X \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\|_X &= 0. \end{aligned}$$

- ▶ Sei  $\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\|_X = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\|_X$ .
- ▶  $\alpha = 0 \Rightarrow$  klar.
- ▶ Sei  $\alpha > 0$  und sei  $\tilde{x}_n := \frac{x_n}{\|x_n\|}$ ,  $\tilde{y}_n := \frac{y_n}{\|y_n\|}$ . Sei  $\epsilon > 0$ .
- ▶  $X$  glm. konvex  $\Rightarrow \exists \delta > 0$  s.d.

$$\|\tilde{x}_n - \tilde{y}_n\| \geq \epsilon \Rightarrow \|\tilde{x}_n + \tilde{y}_n\| \leq 2(1 - \delta).$$

- ▶ Da aber  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{x}_n + \tilde{y}_n\| = 2$  gilt schließlich  $\|\tilde{x}_n + \tilde{y}_n\| \geq 2(1 - \delta)$ .
- ▶ Somit notwendigerweise  $\|\tilde{x}_n - \tilde{y}_n\| \leq \epsilon$  für  $n$  groß genug.
- ▶ Dies gilt  $\forall \epsilon > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{x}_n - \tilde{y}_n\| = 0$ .
- ▶ Somit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$ .

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- $X$  ist gleichmäßig konvex, **denn sonst**  $\exists \epsilon > 0$  s.d.  $\forall n \in \mathbb{N}$   
 $\exists x_n, y_n \in X$  s.d.

$$\|x_n\| = \|y_n\| = 1 \text{ und } \|x_n - y_n\| \geq \epsilon \text{ aber } \|x_n + y_n\| \geq 2\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

- Somit ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\| = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\|$$

obwohl

$$\|x_n - y_n\| \geq \epsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad \zeta$$

$X$  Banachraum,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$

## Lemma

Ist  $X$  gleichmäßig konvex und gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\|_X,$$

so konvergiert  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

## Beweis.

- ▶  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist Cauchy, **denn sonst**  $\exists \epsilon > 0$  und  $\exists (n_k)_{k \in \mathbb{N}}, (m_h)_{h \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$  s.d.

$$n_1 < m_1 < n_2 < m_2 \dots$$

und

$$\|x_{n_k} - x_{m_h}\| > \epsilon \quad \forall h, k \in \mathbb{N}.$$

- ▶ Es gilt aber auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{x_{n_k} + x_{m_k}}{2} \right\|_X = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k}\|_X = \lim_{h \rightarrow \infty} \|x_{m_h}\|_X.$$

- ▶ Voriges Lemma  $\Rightarrow \lim_{h \rightarrow \infty} \|x_{n_h} - x_{m_h}\|_X = 0.$



# Beweises des Satzes von Milman–Pettis - 1

- ▶ Z.z.:  $\forall x'' \in X'' \exists x_0 \in X$  s.d.  $\langle \phi, x_0 \rangle = x''(\phi) \forall \phi \in X'$ . (O.B.d.A.:  $\|x''\|_{X''} = 1$ ).
- ▶ Sei  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X'$  mit  $\|\phi_n\|_{X'} = 1$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x''(\phi_n)| = \|x''\| = 1.$$

- ▶ Wir werden zeigen:  $\exists x_0 \in X$  s.d.  $\|x_0\|_X = 1$  und

$$x''(\phi_n) = \langle \phi_n, x_0 \rangle \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- ▶ Sei  $\alpha_i := x''(\phi_i)$ . Dann ist  $\forall \beta \in \mathbb{K}^n$

$$\left| \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i \right| = \left| x'' \left( \sum_{k=1}^n \beta_k \phi_k \right) \right| \leq \left\| \sum_{k=1}^n \beta_k \phi_k \right\|.$$

# Beweis des Satzes von Milman–Pettis - 2

- ▶ Satz von Helly  $\Rightarrow \exists x_m \in X$  s.d.  $\|x_m\| \leq 1 + \frac{1}{m}$  s.d.

$$\langle \phi_n, x_m \rangle = x''(\phi_n) \quad \forall n = 1, \dots, m.$$

- ▶ Sei  $n \leq m$ . Dann

$$\|x_n + x_m\| \geq |\langle \phi_n, x_n \rangle + \langle \phi_n, x_m \rangle| = 2|x''(\phi_n)|.$$

- ▶ Somit  $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \|x_n + x_m\| \geq 1$ .
- ▶  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq 1 \Rightarrow$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \|x_n + x_m\| = 1$ .
- ▶ Zweites Lemma  $\Rightarrow \exists x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .
- ▶ Grenzwert für  $m \rightarrow \infty \Rightarrow$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle \phi_n, x_m \rangle = \langle \phi_n, x_0 \rangle = x''(\phi_n).$$

Die Aussage ist nur noch für  $\phi_n$  bewiesen, nicht  $\forall \phi_0 \in X'$  mit  $\|\phi_0\|_{X'} = 1$ .

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H–B  
Geometrische  
Versionen von H–B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# Beweis des Satzes von Milman–Pettis - 3

Man hat bewiesen, dass  $\exists x_m \in X$  mit  $\|x_m\| \leq 1 + \frac{1}{m}$  s.d.

$$\langle \phi_n, x_m \rangle = x''(\phi_n),$$

und folglich dass  $\exists x_0 \in X$  s.d.  $\|x_0\|_X = 1$  und

$$x''(\phi_n) = \langle \phi_n, x_0 \rangle \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nun gilt folgendes.

- ▶ Sei  $\phi_0 \in X'$  mit  $\|\phi_0\|_{X'} = 1$ . Obiges Argument für  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \Rightarrow \exists \hat{x}_0 \in X$  s.d.  $\|\hat{x}_0\|_X = 1$  und

$$x''(\phi_n) = \langle \phi_n, \hat{x}_0 \rangle \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- ▶ Somit  $\frac{1}{2}\|x_0 + \hat{x}_0\|_X \geq |\langle \phi_n, \frac{1}{2}(x_0 + \hat{x}_0) \rangle| = |x''(\phi_n)|$ .
- ▶ Somit  $\frac{1}{2}\|x_0 + \hat{x}_0\|_X = 1$ .
- ▶  $X$  glm. konvex  $\Rightarrow x_0 = \hat{x}_0 \Rightarrow \langle \phi_0, x_0 \rangle = \langle \phi_0, \hat{x}_0 \rangle$ .
- ▶  $\phi \in X'$  beliebig  $\Rightarrow$  Aussage.

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# Clarksonsche Ungleichungen

$(\Omega, \mu)$  Maßraum

Satz. (J.A. Clarkson 1936)

Sind  $f, g \in L^p(\Omega, \mu)$ , so gilt

$$(\|f\|_p + \|g\|_p)^p + \left| \|f\|_p - \|g\|_p \right|^p \geq \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \geq 2\|f\|_p^p + 2\|g\|_p^p$$

$\forall p \in [2, \infty)$  und

$$(\|f\|_p + \|g\|_p)^p + \left| \|f\|_p - \|g\|_p \right|^p \leq \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq 2\|f\|_p^p + 2\|g\|_p^p$$

$\forall p \in (1, 2]$ .

(Für  $p = 2$  gelten alle 4 Ungleichungen: das ist das Parallelogrammgesetz.)

(Wir führen den Beweis in der Version von O. Hanner 1958)

Korollar. (J.A. Clarkson 1936)

$L^p(\Omega, \mu)$  ist gleichmäßig konvex  $\forall p \in (1, \infty)$ .

Korollar.

$L^p(\Omega, \mu)$  ist reflexiv  $\forall p \in (1, \infty)$ .

Beweis des Korollars,  $p \in (1, 2) - 1$ 

- ▶ Seien  $\epsilon > 0$  und  $f, g \in L^p(\Omega, \mu)$  mit

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 1 \text{ und } \|f - g\|_p > \epsilon.$$

Es reicht zu zeigen dass  $\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p < 1 - \delta$  für ein  $\delta = \delta(\epsilon)$ .

- ▶ Sei

$$f^* := \frac{1}{2}(f + g) \quad \text{und} \quad g^* := \frac{1}{2}(f - g),$$

und somit  $f = f^* + g^*$  und  $g = f^* - g^*$ .

- ▶ Sei

$$\xi : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \ni (x, y) \mapsto (x + y)^p + |x - y|^p \in [0, +\infty).$$

- ▶ Es gilt  $\xi(x, y) = \xi(y, x)$  und  $\forall x \in (0, \infty) \ y \mapsto \xi(x, y)$  ist monoton wachsend.
- ▶  $\xi(1, 0) = 2$  und somit  $\xi(1, \frac{\epsilon}{2}) > 2$  und  $\xi(0, \frac{\epsilon}{2}) = \xi(\frac{\epsilon}{2}, 0) < 2$ .
- ▶ MWS  $\Rightarrow \exists \delta \in (0, 1)$  s.d.

$$\xi(1 - \delta, \frac{\epsilon}{2}) = 2.$$

# Beweis des Korollars, $p \in (1, 2) - 2$

- 1. Clarksonsche Abschätzung für  $f^*, g^* \Rightarrow$

$$\|f^* + g^*\|_p^p + \|f^* - g^*\|_p^p \geq \xi(\|f^*\|_p, \|g^*\|_p) \quad \mu - \text{f.ü.}$$

d.h.

$$\|f\|_p^p + \|g\|_p^p \geq \xi(\|f^*\|_p, \|g^*\|_p) \quad \mu - \text{f.ü.}$$

- $\|f\|_p^p + \|g\|_p^p \geq \xi(\|f^*\|_p, \|g^*\|_p)$  und  $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$  und  $\|f - g\|_p > \epsilon$ , und somit

$$\xi(1 - \delta, \frac{\epsilon}{2}) = 2 \geq \xi(\|f^*\|_p, \|g^*\|_p) \geq \xi(\|f^*\|_p, \frac{\epsilon}{2}).$$

- $\xi(\cdot, \frac{\epsilon}{2})$  monoton wachsend  $\Rightarrow \|f^*\|_p \leq 1 - \delta$ .

Beweis des Korollars,  $p \in (2, \infty)$ 

- Seien  $\epsilon > 0$  und  $f, g \in L^p(\Omega, \mu)$  mit

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 1 \text{ und } \|f - g\|_p > \epsilon.$$

- Sei wieder

$$f^* := \frac{1}{2}(f + g) \quad \text{und} \quad g^* := \frac{1}{2}(f - g).$$

- 2. Clarksonsche Abschätzung für  $f^*, g^* \Rightarrow$

$$\|f^* + g^*\|_p^p + \|f^* - g^*\|_p^p \geq 2\|f^*\|_p^p + 2\|g^*\|_p^p \quad \mu - \text{f.ü.}$$

und somit

$$2 = \|f\|_p^p + \|g\|_p^p \geq 2\|f^*\|_p^p + 2\|g^*\|_p^p \geq 2\|f^*\|_p^p + 2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p \quad \mu - \text{f.ü.}$$

- D.h.  $\|f^*\|_p^p \leq 1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p$ .

- Die Aussage gilt mit

$$\delta := 1 - \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

# Beweis der 1. Abschätzung ( $1 < p < 2$ ) - 1

- ▶ Z.z.:

$$(\|f\|_p + \|g\|_p)^p + \left| \|f\| - \|g\| \right|^p \leq \|f + g\|_p^p + \|f - g\|_p^p.$$

- ▶ Wir zeigen: Es reicht, diese Ungleichung für  $f, g \geq 0$  zu beweisen.

- ▶ Sei

$$\delta : \mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) \mapsto |z_1 + z_2|^p + |z_1 - z_2|^p \in [0, \infty).$$

- ▶ Ist  $z_1 = 0$ , so ist  $\min_{z_2 \in \mathbb{C}} \delta(z_1, z_2) = 2|z_2|^p$ ; ist  $z_2 = 0$ , so ist  $\min_{z_1 \in \mathbb{C}} \delta(z_1, z_2) = 2|z_1|^p$ .

- ▶ Schreibe  $z_2 = z_1 a^{-1} b e^{i\phi}$ , mit  $a := |z_1|, b > 0$ . Dann ist

$$d(\phi) = |a + b e^{i\phi}|^p + |a - b e^{i\phi}|^p = (a^2 + b^2 + 2ab \cos \phi)^{\frac{p}{2}} + (a^2 + b^2 - 2ab \cos \phi)^{\frac{p}{2}}$$

- ▶  $\min_{\phi \in [0, 2\pi)} d(\phi) = (a + b)^p + |a - b|^p$  (min wird in  $\phi = 0, \pi$  angenommen).

# Beweis der 1. Abschätzung ( $1 < p < 2$ ) - 2

- ▶ Somit

$$|z_1 + z_2|^p + |z_1 - z_2|^p \geq (|z_1| + |z_2|)^p + ||z_1| - |z_2||^p \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

- ▶ Für  $f(x) = z_1$  und  $g(x) = z_2$  gilt es somit

$$\int_{\Omega} (|f(x) + g(x)|^p + |f(x) - g(x)|^p) dx \geq \int_{\Omega} ((|f(x)| + |g(x)|)^p + ||f(x)| - |g(x)||^p) dx.$$

- ▶ Es reicht also

$$(\|f^*\|_p + \|g^*\|_p)^p + ||\|f^*\|_p - \|g^*\|_p|^p \leq \|f^* + g^*\|_p^p + \|f^* - g^*\|_p^p$$

zu zeigen, wobei  $f^* := |f|$  und  $g^* := |g|$

# Beweis der 1. Abschätzung ( $1 < p < 2$ ) - 3

- ▶ Sei

$$\zeta : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \ni (x, y) \mapsto (x^{\frac{1}{p}} + y^{\frac{1}{p}})^p + |x^{\frac{1}{p}} - y^{\frac{1}{p}}|^p \in [0, +\infty).$$

- ▶ Man soll

$$\int_{\Omega} \zeta(\tilde{f}(x), \tilde{g}(x)) \, dx \geq \zeta\left(\int_{\Omega} \tilde{f}(x) \, dx, \int_{\Omega} \tilde{g}(x) \, dx\right)$$

zeigen, wobei  $\tilde{f} := (f^*)^p$  und  $\tilde{g} := (g^*)^p$ .

- ▶ Es reicht [ Warum? **ÜA** ] z.z., dass  $\zeta$  konvex ist.
- ▶ Da  $\zeta(x, y) = \zeta(y, x) \, \forall x, y$  und  $\zeta(0, 0) = 0$  und  $\zeta(tx, ty) = t\zeta(x, y) \, \forall t \geq 0$ .
- ▶ Nun,  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \zeta(x, y) \in \mathbb{R}, x, y \in [0, +\infty)\}$  ist ein in  $(0, 0, 0)$  zentrierter Kegel.

Beweis der 1. Abschätzung ( $1 < p < 2$ ) - 4

- Er reicht z.z., dass  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \zeta(x, y), x, y \in [0, +\infty)\}$   
oder einfacher

$$\{(x, 1, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \theta(x) := \zeta(x, 1), x \in [0, +\infty)\}$$

konvex ist.

- $\theta(x) = \zeta(x, 1) = (x^{\frac{1}{p}} + 1)^p + |x^{\frac{1}{p}} - 1|^p$  und somit

$$\theta'(x) = x^{\frac{1}{p}-1} \left( |x^{\frac{1}{p}} + 1|^{p-1} - |x^{\frac{1}{p}} - 1|^{p-1} \right).$$

während

$$\begin{aligned} \theta''(x) &= \frac{1-p}{p} x^{\frac{1}{p}-2} \left( x^{\frac{1}{p}} + 1 \right)^{p-1} + \frac{p-1}{p} x^{\frac{2}{p}-2} \left( x^{\frac{1}{p}} + 1 \right)^{p-2} \\ &\quad + \frac{p-1}{p} x^{\frac{1}{p}-2} \left| x^{\frac{1}{p}} - 1 \right|^{p-1} + \frac{p-1}{p} x^{\frac{2}{p}-2} \left| x^{\frac{1}{p}} - 1 \right|^{p-2} \\ &= \frac{1-p}{p} x^{\frac{1}{p}-2} \left( x^{\frac{1}{p}} + 1 \right)^{p-2} + \frac{p-1}{p} x^{\frac{1}{p}-2} \left| x^{\frac{1}{p}} - 1 \right|^{p-2} \end{aligned}$$

- Somit ist  $\theta'$  stetig,  $\theta''(x) > 0 \forall x \neq 1$  und  $\lim_{x \rightarrow 1} \theta''(x) = +\infty \Rightarrow$   
 $\theta$  konvex.

# Beweis der 1. Abschätzung ( $p > 2$ )

Der Beweis wird ähnlich durchgeführt, indem man sieht, dass

- ▶  $d$  sein max in  $\phi = 0, \pi$  annimmt, und dass
- ▶  $\zeta$  konkav (statt konvex wie im Fall  $p \in (1, 2)$ ) ist.

Beweis der 2. Abschätzung ( $p > 2$ )

- ▶ Z.z.:

$$2\|f\|_p^p + 2\|g\|_p^p \leq \|f + g\|_p^p + \|f - g\|_p^p.$$

- ▶ Sei wieder

$$\delta : \mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) \mapsto |z_1 + z_2|^p + |z_1 - z_2|^p \in [0, \infty).$$

- ▶ Schreibe wieder  $z_2 = z_1 a^{-1} b e^{i\phi}$ , mit  $a := |z_1|$ ,  $b > 0$ , so dass

$$d(\phi) = |a + b e^{i\phi}|^p + |a - b e^{i\phi}|^p = (a^2 + b^2 + 2ab \cos \phi)^{\frac{p}{2}} + (a^2 + b^2 - 2ab \cos \phi)^{\frac{p}{2}}.$$

- ▶  $\min_{\phi \in [0, 2\pi)} d(\phi) = 2(a^2 + b^2)^{\frac{p}{2}}$  (min wird in  $\phi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  angenommen).

- ▶ Konvexität von  $t \mapsto t^{\frac{p}{2}} \Rightarrow$

$$(a^2 + b^2)^{\frac{p}{2}} > a^p + b^p \quad \forall a, b > 0.$$

- ▶ Somit  $\min_{\phi \in [0, 2\pi)} d(\phi) \geq 2a^p + 2b^p$ .

- ▶ Somit  $|z_1 + z_2|^p + |z_1 - z_2|^p \geq 2|z_1|^p + 2|z_2|^p \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

- ▶ Für  $f(x) = z_1$  und  $g(x) = z_2$  gilt es somit

$$\int_{\Omega} (|f(x) + g(x)|^p + |f(x) - g(x)|^p) dx \geq 2 \int_{\Omega} (|f(x)|^p + |g(x)|^p) dx.$$

# Beweis der 2. Abschätzung ( $1 < p < 2$ )

Der Beweis wird ähnlich durchgeführt. [ Details: **ÜA** ]

## Anmerkung.

- ▶  $L^1(0, 1)$  ist nicht strikt (und somit auch nicht gleichmäßig) konvex. Denn für  $f(x) := 2x$  und  $g(x) := 2 - 2x$ ,  $x \in (0, 1)$ , gilt  $\frac{1}{2}(f + g)(x) = 1$ ,  $x \in (0, 1)$ , und somit  $f, g \in L^1(0, 1)$  und  $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = \|\frac{1}{2}(f + g)\|_\infty = 1$ , obwohl  $f \neq g$ .
- ▶  $L^\infty(0, 1)$  ist nicht strikt (und somit auch nicht gleichmäßig) konvex. Denn für  $f(x) := 1$  und  $g(x) := 1 - 2x$ ,  $x \in (0, 1)$ , gilt  $\frac{1}{2}(f + g)(x) = 1 - x$ ,  $x \in (0, 1)$ , und somit  $f, g \in L^\infty(0, 1)$  und  $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = \|\frac{1}{2}(f + g)\|_\infty = 1$ , obwohl  $f \neq g$ .

$(\Omega, \mu)$  Maßraum.

**Satz.**

Sind  $p, q \in (1, \infty)$  mit  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ , so ist

$$\gamma : L^q(\Omega, \mu) \ni g \mapsto \gamma_g \in (L^p(\Omega, \mu))'$$

ein isometrischer Isomorphismus, wobei

$$\gamma_g : L^p(\Omega, \mu) \ni f \mapsto \int_{\Omega} f \cdot g \, d\mu \in \mathbb{C}.$$

**Beweis.**

Ähnlich wie für  $\ell^p$

[ Details: **ÜA** ]



# $\sigma$ -endliche Maßräume und Dualität

$(\Omega, \mu)$  Maßraum

**Definition.**

$(\Omega, \mu)$  heißt  **$\sigma$ -endlich**, falls  $\exists (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$  s.d.  $\mu(A_n) < \infty$

$\forall n \in \mathbb{N}$  und  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$ .

(O.b.d.A.:  $A_n \subset A_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ )

**Satz.**

Ist  $(\Omega, \mu)$   $\sigma$ -endlich, so ist

$$\gamma : L^\infty(\Omega, \mu) \ni g \mapsto \gamma_g \in (L^1(\Omega, \mu))',$$

ein isometrischer Isomorphismus, wobei

$$\gamma_g : L^1(\Omega, \mu) \ni f \mapsto \int_{\Omega} f \cdot g d\mu \in \mathbb{C}.$$

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie **$L^p$ -Räume**Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- Erfüllt  $g \in L^\infty(\Omega, \mu)$   $\int_\Omega g \, d\mu = 0$ , d.h.

$$\int_{\Omega} f \cdot g \, d\mu = 0 \quad \forall f \in L^1(\Omega, \mu),$$

so gilt  $\forall f_n := \mathbf{1}_{\Omega_n} \operatorname{sign} g \in L^1(\Omega, \mu)$

$$\int_{\Omega_n} |f| \, d\mu = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Somit  $f = 0$   $\mu$ -f.ü.

# Beweis - Surjektivität - 1

► Sei  $\phi \in (L^1(\Omega, \mu))'$ . Z.z.:  $\exists u \in L^\infty(\Omega, \mu)$  s.d.  $\phi = \gamma_u$ .

► Sei

$$\theta|_{\Omega_1} := \alpha_1 \quad \mu\text{-f.ü. und } \theta|_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} := \alpha_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

wobei  $\alpha_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$  mit

$$\|\theta\|_2^2 = \int_{\Omega_1} |\theta|^2 d\mu + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega_{k+1} \setminus \Omega_k} |\theta|^2 d\mu = (|\Omega_1| \alpha_1)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (|\Omega_n| \alpha_n)^2 < \infty,$$

s.d.  $\theta \in L^2(\Omega, \mu)$ .

►  $L^2(\Omega, \mu) \ni f \mapsto \langle \phi, \theta \cdot f \rangle \in \mathbb{C}$  ist ein stetiges lineares Funktional.

► Riesz-Fréchet  $\Rightarrow \exists |v \in L^2(\Omega, \mu)$  s.d.

$$\langle \phi, \theta \cdot f \rangle = (v|f)_{L^2} \quad \forall f \in L^2(\Omega, \mu).$$

► Sei

$$u := \frac{v}{\theta}, \quad \mu\text{-f.ü.}$$

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

## Beweis - Surjektivität - 2

- ▶  $u$  ist meßbar und  $u\mathbf{1}_{\Omega_n} \in L^2(\Omega, \mu)$ . Noch z.z.:  $u \in L^\infty(\Omega, \mu)$  und

$$\langle \phi, f \rangle = \int_{\Omega} u f \, d\mu \quad \forall f \in L^1(\Omega, \mu).$$

- ▶ Es gilt

$$\langle \phi, \mathbf{1}_{\Omega_n} g \rangle = \int_{\Omega} u \mathbf{1}_{\Omega_n} g \, d\mu \quad \forall g \in L^\infty(\Omega, \mu), \forall n \in \mathbb{N},$$

(setze einfach  $f := \frac{\mathbf{1}_{\Omega_n} g}{\theta}$  in

$$\langle \phi, \theta \cdot f \rangle = (v|f)_{L^2} \quad \forall f \in L^2(\Omega, \mu)$$

ein).

- ▶ Sei  $C > \|\phi\|_{(L^1)'}$  und

$$A := \{x \in \Omega : |u(x)| > C\}.$$

- ▶  $\mu(A) = 0$ , denn für  $g := \mathbf{1}_A \operatorname{sign} u$  gilt

$$\int_{A \cap \Omega_n} |u| \, d\mu \leq \|\phi\|_{(L^1)'} \mu(A \cap \Omega_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- ▶ Somit  $C\mu(A \cap \Omega_n) \leq \|\phi\|_{(L^1)'} \mu(A \cap \Omega_n) \Rightarrow \mu(A \cap \Omega_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

- ▶ Daher  $\mu(A) = 0$  und  $\phi \in L^\infty(\Omega, \mu)$  mit

$$\|u\|_\infty \leq \|\phi\|_{(L^1)'}$$

► Sei  $h \in L^1(\Omega, \mu)$ . Dann ist  $u \cdot h \in L^1(\Omega)$ .

► Setze  $g := T_n h$  in

$$\langle \phi, \mathbf{1}_{\Omega_n} g \rangle = \int_{\Omega} u \mathbf{1}_{\Omega_n} g \, d\mu \quad \forall g \in L^\infty(\Omega, \mu), \forall n \in \mathbb{N}$$

ein, wobei  $T_n$  der **Trunkierungsoperator** ist:

$$T_n : \mathbb{R} \ni x \mapsto \min\{|x|, n\} \operatorname{sign}(x) \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

► Beppo Levi  $\Rightarrow \mathbf{1}_{\Omega_n} T_n h \rightarrow h$  in  $L^1(\Omega, \mu)$ .

► Somit

$$\langle \phi, h \rangle \leftarrow \langle \phi, \mathbf{1}_{\Omega_n} T_n h \rangle = \int_{\Omega} u \mathbf{1}_{\Omega_n} T_n h \, d\mu \rightarrow \int_{\Omega} u h \, d\mu.$$

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- ▶ Schon bekannt:

$$\|u\|_{\infty} \leq \|\phi\|_{(L^1)'}$$

- ▶ Andererseits

$$\langle \phi, h \rangle = \int_{\Omega} u h \, d\mu$$

und somit

$$|\langle \phi, h \rangle| \leq \|u\|_{\infty} \|h\|_1 \quad \forall h \in L^1(\Omega, \mu).$$

- ▶ Somit  $\|\phi\|_{(L^1)'} \leq \|u\|_{\infty}$ .

Man identifiziert also  $(L^1(\Omega, \mu))'$  und  $L^\infty(\Omega, \mu)$ .

## Satz.

*Besteht  $(\Omega, \mu)$  nicht aus endlich vielen Atomen, so ist  $L^1(\Omega, \mu)$  nicht reflexiv.*

## Beweis.

Betrachte zwei Fälle:

- (i)  $\forall \epsilon > 0 \exists \omega \subset \Omega$  messbar mit  $0 < \mu(\omega) < \epsilon$ .
- (ii)  $\exists \epsilon > 0$  s.d.  $\mu(\omega) \geq \epsilon \forall \omega \subset \Omega$  messbar mit  $\mu(\omega) > 0$ .

- ▶ Im Fall (i) betrachtet man eine Folge  $\omega_n$  messbarer Mengen mit  $\mu(\omega_n) > 0$  und  $\mu(\omega_n) \searrow 0$ .
- ▶ Man findet mithilfe der Reflexivität eine schwach konvergierende Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1$  s.d.  $\int_{\omega_m} u_n d\mu = 1$  für  $n$  groß aber auch  $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\omega_m} \sigma - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\omega_m} u_n d\mu = 0$ .
- ▶ Im Fall (ii) ist  $L^1(\Omega, \mu) \simeq \ell^1$  und somit nicht reflexiv.

[ Details: **ÜA** ]



## Korollar.

Besteht  $(\Omega, \mu)$  nicht aus endlich vielen Atomen, so ist  $L^\infty(\Omega, \mu)$  nicht reflexiv.

## Anmerkung.

- ▶ Somit ist  $L^1(\Omega, \mu) \subsetneq (L^\infty(\Omega, \mu))'$ . Solche Funktionale können mithilfe von Hahn–Banach gefunden werden, etwa für  $\Omega = \mathbb{R}^N$ .
- ▶ Sei  $\delta_0 : C_c(\mathbb{R}^N) \ni f \mapsto f(0) \in \mathbb{K}$ : dann ist  $\delta_0 \in (C_c(\mathbb{R}^N))'$ .
- ▶ Hahn–Banach  $\Rightarrow \delta_0$  kann auf ein  $\phi \in (L^\infty(\mathbb{R}^N))'$  fortgesetzt werden.
- ▶ Also  $\langle \phi, f \rangle = f(0) \forall f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ .
- ▶  $\forall u \in L^1(\mathbb{R}^N) \langle \phi, \cdot \rangle \neq \int_{\mathbb{R}^N} u \cdot d\mu$ , denn sonst wäre

$$\int_{\mathbb{R}^N} uf \, d\mu = 0 \quad \forall f \in C_c(\mathbb{R}^N) \text{ s.d. } f(0) = 0.$$

- ▶ Man kann zeigen, dass dann  $u = 0$   $\mu$ -f.ü. und somit  $\phi = 0$ . ⚡

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie **$L^p$ -Räume**Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$\Omega$  messbare Teilmenge von  $\mathbb{R}^N$ ,  $\mu$  Lebesgue-Maß

Satz.

$L^p(\Omega)$  ist separabel  $\forall p \in [1, \infty)$ .

Satz.

$L^\infty(\Omega)$  ist nicht separabel.

Beweis.

Der Beweis ist ähnlich zum Fall von  $\ell^\infty$ .

[ Details: ÜA ]



Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Satz.

$C_c(\mathbb{R}^N)$  liegt dicht in  $L^p(\mathbb{R}^N) \forall p \in [1, \infty)$ .

Anmerkung.

Eigentlich gilt sogar:  $C_c^\infty(\overline{\Omega})$  ist dicht in  $L^p(\Omega, \mu)$  bzgl. der  $\|\cdot\|_p$ -Norm  $\forall \Omega \subset \mathbb{R}^N$  offen und  $\forall p \in [1, \infty)$ . Für einen Beweis: vgl. H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Cor. 4.23.

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- ▶ Sei  $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$  und  $\epsilon > 0$ .
- ▶ Sei  $T_n : \mathbb{R} \ni x \mapsto \min\{|x|, n\} \text{sign}(x) \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- ▶ Sei  $f_n := \mathbf{1}_{B_n(0)} T_n f$ .
- ▶ Beppo Levi  $\Rightarrow \|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ .
- ▶ Somit  $\exists g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$  und  $K = B_n(0) \subset \mathbb{R}^N$  kompakt s.d.  
 $g|_{\mathbb{R}^N \setminus K} = 0$   $\mu$ -f.ü. und

$$\|f - g\|_p < \epsilon$$

(betrachte  $g = f_n$  für  $n$  groß genug).

- ▶  $\overline{C_c(\mathbb{R}^N)} = L^1(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \forall \delta > 0 \exists h \in C_c(\mathbb{R}^N)$  s.d.

$$\|g - h\|_1 \leq \delta.$$

- ▶ Sei  $\tilde{h} := T_n h \in C_c(\mathbb{R}^N)$ , wobei  $n \geq \|g\|_\infty$ , so dass  $\|h\|_\infty \geq \|\tilde{h}\|_\infty$ .
- ▶ Interpolationsungleichung  $\Rightarrow$  es gilt

$$\|g - \tilde{h}\|_p \leq \|g - \tilde{h}\|_1^{\frac{1}{p}} \|g - \tilde{h}\|_\infty^{1 - \frac{1}{p}} \leq \delta^{\frac{1}{p}} (2\|\tilde{h}\|_\infty)^{1 - \frac{1}{p}}.$$

- ▶ Die Aussage folgt, wenn man  $\delta$  klein genug wählt, dass  
 $\delta^{\frac{1}{p}} (2\|\tilde{h}\|_\infty)^{1 - \frac{1}{p}} < \epsilon$ .

# Beweis der Separabilität - 1

- ▶ Man nimmt erst an,  $\Omega = \mathbb{R}^N$ .
- ▶ Sei  $\mathcal{R} := \{R = \prod_{k=1}^n (a_k, b_k) \subset \mathbb{R}^N : a_k, b_k \in \mathbb{Q}\}$ .
- ▶ Sei  $X$  der Vektorraum der endlichen  $\mathbb{Q}$ -linearen Kombinationen von Funktionen  $\mathbf{1}_R$ ,  $R \in \mathcal{R}$ .
- ▶  $X \subset L^p(\mathbb{R}^N)$  und  $X$  ist abzählbar.
- ▶ Es reicht z.z.:  $\overline{X} = L^p(\mathbb{R}^N)$ .

# Beweis der Separabilität - 2

- ▶ Sei  $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$  und  $\epsilon > 0$ . Sei  $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$  s.d.  $\|f - g\|_p \leq \epsilon$ .
- ▶ Sei  $R \in \mathcal{R}$  s.d.  $g|_{\mathbb{R}^N \setminus R} \equiv 0$ .
- ▶  $R$  kompakt  $\Rightarrow \forall \delta > 0 \exists R_1, \dots, R_N \in \mathcal{R}$  s.d.  $R = \bigcup_{h=1}^N R_h$  und

$$\sup_{x \in R_i} g(x) - \inf_{x \in R_i} g(x) < \delta.$$

- ▶ Für  $\delta := \epsilon |R|^{-\frac{1}{p}}$  und

$$h := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{R_j}$$

gilt (Hölder)

$$\|g - h\|_p \leq \|g - h\|_\infty |R|^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon.$$

- ▶ Somit

$$\|f - h\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - h\|_p \leq 2\epsilon.$$

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- ▶ Ist  $\Omega \neq \mathbb{R}^N$ , betrachte die Abbildung

$$T : L^p(\Omega) \ni f \mapsto Tf \in L^p(\mathbb{R}^N),$$

wobei

$$Tf(x) := \begin{cases} f(x) & x \in \Omega, \\ 0 & x \notin \Omega. \end{cases}$$

- ▶  $T(L^p(\Omega))$  ist ein abgeschlossener Teilraum von  $L^p(\mathbb{R}^N)$ , also ebenfalls separabel.
- ▶  $T(L^p(\Omega))$  ist dem  $L^p(\Omega)$  isomorph.
- ▶ Somit ist  $L^p(\Omega)$  separabel.

$K$  kompakter metrischer Raum

Theorem. (K.T.W. Weierstraß 1885 & M.H. Stone 1937)

Eine Unteralgebra  $\mathcal{A} \subset C(K; \mathbb{K})$  liegt dicht in  $C(K, \mathbb{K})$ , falls

- ▶  $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$ ,
- ▶  $\mathcal{A}$  trennt die Punkte von  $K$ , d.h.  $\forall x, y \in K, x \neq y,$   
 $\exists f \in \mathcal{A}$  s.d.  $f(x) \neq f(y)$ ,
- ▶  $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{A}$  (falls  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ).

Dazu verwendet man:

## Lemma (U. Dini)

*Sei  $K$  kompakter metrischer Raum,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(K, \mathbb{R})$  punktweise monoton wachsend. Konvergiert  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise, so ist die Konvergenz bereits gleichmäßig (d.h. bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$ ).*

Delio Mugnolo

## Lemma

$[0, 1] \ni t \mapsto \sqrt{t} \in [0, 1]$  ist gleichmäßiger Grenzwert einer Folge von Polynome.

## Beweis.

- ▶ Definiere  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  durch

$$p_0(t) := 0, \quad p_{n+1}(t) := p_n(t) + \frac{1}{2}(t - p_n(t))^2, \quad t \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

- ▶ Induktiv beweist man, dass  $p_n(t) \leq \sqrt{t} \forall t \in [0, 1]$  und all  $n \in \mathbb{N}$ .
- ▶ Somit ist  $(p_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt und monoton wachsend,  $\forall t \in [0, 1]$ . Somit konvergiert es.
- ▶ In der Tat:  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(t) = \sqrt{t} \forall t \in [0, 1]$ . [ Details: [ÜA](#) ].
- ▶ Lemma von Dini  $\Rightarrow$  Aussage.

□

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# Beweis - $\mathbb{K} = \mathbb{R} - 1$

- ▶ Wir zeigen: Ist  $f \in A$ , dann ist  $|f| \in \overline{A}$ , wobei  $|f| : K \ni x \mapsto |f(x)| \in \mathbb{R}_+$ : klar für  $f = 0$ .
- ▶ Sonst betrachte  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$p_0(t) := 0, \quad p_{n+1}(t) := p_n(t) + \frac{1}{2}(t - p_n(t))^2, \quad t \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

und schreibe

$$|f| = \|f\|_\infty \sqrt{\frac{f^2}{\|f\|_\infty^2}} = \|f\|_\infty \lim_{n \rightarrow \infty} p_n\left(\frac{f^2}{\|f\|_\infty^2}\right).$$

- ▶ Somit: Sind  $f, g \in \overline{A}$ , so gilt auch  $\inf\{f, g\} := \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \in \overline{A}$  und  $\sup\{f, g\} := \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \in \overline{A}$ .
- ▶ Sind  $x, y \in K$  mit  $x \neq y$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dann  $\exists f \in A$  s.d.  $f(x) = \alpha$  und  $f(y) = \beta$  z.B.

$$f(z) := \alpha + (\beta - \alpha) \frac{g(z) - g(x)}{g(y) - g(x)}, \quad z \in K,$$

wobei  $g \in A$   $x, y$  trennt.

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Noch z.z.  $\bar{A} = C(K, \mathbb{R})$ .

- ▶ Sei  $\epsilon > 0$  und  $f \in C(K, \mathbb{R})$  und sei  $x \in K$ . Dann  $\forall y \in K \exists g_y \in A$  s.d.  $g_y(x) = f(x)$  und  $g_y(y) = f(y)$ .
- ▶ Sei  $U_y$  Umgebung von  $y$  s.d.  $g_y(x) \leq f(x) + \epsilon \forall x \in U_y$ .
- ▶  $K = \bigcup_{y \in K} U_y$  und Heine-Borel  $\Rightarrow \exists y_1, \dots, y_N \in K$  s.d.  $K = \bigcup_{k=1}^N U_{y_k}$ .
- ▶ Sei nun  $h_x := \inf_{1 \leq k \leq N} g_{y_k}$ . Dann gilt  $h_x \in \bar{A}$ .
- ▶  $h_x(x) = f(x)$  und  $h_x \leq f + \epsilon$  und  $h_x(z) \geq f(z) - \epsilon \forall z \in V_x$ ,  $V_x$  Umgebung von  $x$ .
- ▶ Heine-Borel  $\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_M \in K$  s.d.  $K = \bigcup_{k=1}^M V_{x_k}$ .
- ▶ Die Aussage gilt mit  $h := \sup_{1 \leq k \leq M} h_{x_k}$ , da  $h \in \bar{A}$ .

- ▶  $\forall f \in A \operatorname{Re} f = \frac{f+\bar{f}}{2} \in A$  und  $\operatorname{Im} f = \frac{f-\bar{f}}{2i} \in A$ .
- ▶ Sei  $A_0 := \{f \in A : f = \bar{f}\}$ : da  $\mathbf{1} \in A_0$  und  $A_0$  trennt die Punkte von  $K$ ,  $\overline{A_0} = C(K, \mathbb{R})$ .
- ▶  $A = A_0 + iA_0 \Rightarrow$  Aussage.

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

**$L^p$ -Räume**

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

**Korollar.**

$\overline{\mathbb{K}[x]} = C(I)$ , für alle abgeschlossene Intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ .

**Korollar.**

$\overline{\mathbb{Q}[x]} = L^p(J)$  für alle offene  $J \subset \mathbb{R}$ ,  $\forall p \in [1, \infty)$ .

# Multiplikationsoperatoren auf $L^p$ -Räume

$(\Omega, \mu)$   $\sigma$ -endlicher Maßraum,  $q : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  messbar,  $p \in [1, \infty]$

**Satz.**

$M_q : f \mapsto q \cdot f$  ist genau dann ein beschränkter linearer Operator auf  $L^p(\Omega, \mu)$ , wenn  $q \in L^\infty(\Omega, \mu)$ , und

$$\|M_q\| = \|q\|_\infty.$$

$0 \in \rho(M_q)$  genau dann, wenn  $0 \notin q_{\text{ess}}(\Omega)$ , wobei

$$q_{\text{ess}}(\Omega) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \mu(\{s \in \Omega : |q(s) - \lambda| < \epsilon\}) \neq 0 \forall \epsilon > 0\}.$$

**Beweis.**

- ▶ Höldersche Ungleichung  $\Rightarrow \|M_q\| \leq \|q\|_\infty$ .
- ▶  $\sigma$ -Endlichkeit  $\Rightarrow \|M_q\| \geq \|q\|_\infty$ . [ Details: **ÜA** ]
- ▶ Invertierbarkeit: ähnlich wie im Fall von  $C(\overline{\Omega})$ . [ Details: **ÜA** ]



Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie **$L^p$ -Räume**Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$X$  Banachraum,  $C \subset X$

**Satz.**

*Ist  $X$  reflexiv und strikt konvex und ist  $C$  abgeschlossen und konvex, so  $\forall x \in X \exists \|y \in C$  s.d.*

$$\|x - y\|_X = \inf\{\|z - x\|_X : z \in C\}.$$

$(M, d)$  metrischer Raum

Definition.

$f : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **nach unten halbstetig** falls  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\{x \in M : f(x) \leq \lambda\}$$

abgeschlossen ist.

Lemma

Sei  $X$  ein reflexiver Banachraum. Sei  $C \subset X$  abgeschlossen und konvex. Ist  $\phi : C \rightarrow \mathbb{R}$  nach unten halbstetig und konvex und erfüllt  $\phi$

$$\lim_{\substack{\|y\|_X \rightarrow \infty \\ y \in C}} \phi(y) = \infty,$$

so besitzt  $f$  ein Minimum.

Details: ÜA .



- ▶ Sei  $x \in X$  und definiere  $\phi_x : C \ni y \mapsto \|x - y\|_X \in \mathbb{R}$ .
- ▶  $\phi_x$  ist stetig, konvex und

$$\lim_{\substack{\|y\|_X \rightarrow \infty \\ y \in C}} \phi_x(y) = \infty.$$

- ▶ Voriges Lemma  $\Rightarrow \exists y_x \in C$  s.d.  $\|x - y_x\| = \inf\{\|z - x\| : z \in C\}$ .
- ▶ Sei  $\tilde{y} \in C$  s.d.

$$\|x - y\| = \|x - \tilde{y}\|.$$

- ▶ Für  $u := x - y_x$  und  $\tilde{u} := x - \tilde{y}$  gilt

$$\left\| \frac{u + \tilde{u}}{2} \right\| = \left\| x - \frac{y_x + \tilde{y}}{2} \right\| \geq \|x - y_x\| = \|u\| = \|\tilde{u}\|,$$

da  $C$  konvex und somit  $\frac{y_x + \tilde{y}}{2} \in C$ .

- ▶ Es gilt auch

$$\left\| \frac{u + \tilde{u}}{2} \right\| \leq \frac{1}{2}(\|u\| + \|\tilde{u}\|) = \|u\|.$$

- ▶  $X$  strikt konvex  $\Rightarrow u = \tilde{u}$  und somit  $y_x = \tilde{y}$ .

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# Beispiel

$(\Omega, \mu)$  Maßraum

**Korollar.**

$\forall f \in L^p(\Omega) \exists |g \in L^p_+(\Omega) := \{h \in L^p(\Omega) : g \geq 0 \text{ } \mu\text{-f.ü.}\} \text{ s.d.}$

$$\|f - g\|_p \leq \|f - h\|_p \quad \forall h \in L^p_+(\Omega).$$

**Korollar.**

Sei  $\mu(\Omega) < \infty$ . Dann  $\forall f \in L^p(\Omega) \forall q \in [p, \infty]$

$\exists |g \in B_1^{(q)}(0) := \{h \in L^q(\Omega) : \|g\|_q \leq 1\} \text{ s.d.}$

$$\|f - g\|_p \leq \|f - h\|_p \quad \forall h \in B_1^{(q)}(0).$$

**Beweis.**

[ Details: **ÜA** ]



$X, Y$  normierte Räume

Ein linearer Operator  $T : X \rightarrow Y$  ist genau dann  
unbeschränkt, falls  $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in X$  s.d.  $\|Tx_n\| \geq n\|x\|$ .

Anmerkung.

*Ein unbeschränkter Operator muß nicht überall in  $X$  definiert  
sein. Vielmehr betrachtet man i.A.,  $T : X \supset D(T) \rightarrow Y$ .*

Definition.

$T : X \supset D(T) \rightarrow Y$  heißt **dicht definiert**, falls  $\overline{D(T)} = X$ .

Der Ortsoperator

$$L^2(\mathbb{R}) \ni f \mapsto \text{id} \cdot f \in L^2(\mathbb{R}).$$

und der Drehimpulsoperator

$$L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}) \ni f \mapsto \begin{pmatrix} -i(y \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial f}{\partial y}) \\ -i(z \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial z}) \\ -i(x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}) \end{pmatrix} \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3).$$

sind unbeschränkte Operatoren.

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

**Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume**

# Fundamentales Beispiel: der Laplace-Operator

$$\Delta := \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

z.B. mit  $D(\Delta) := C^2(\mathbb{R}^N)$  auf  $X := C(\mathbb{R}^N)$

I.A. hängt  $D(\Delta)$  vom  $X$  so wie von den *Randbedingungen* ab.

# Abgeschlossene Operatoren

$X, Y$  normierte Räume,  $T : X \supset D(T) \rightarrow Y$  linear

**Definition.**

$T$  heißt **abgeschlossen**, falls sein Graph

$$G(T) := \{(x, Tx) \in X \times Y : x \in D(T)\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von  $X \times Y$  ist; d.h., wenn für jede  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T)$  aus

$$\exists \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = x \quad \text{und} \quad \exists \lim_{n \in \mathbb{N}} Tx_n = y$$

folgt, dass

$$x \in D(T) \quad \text{und} \quad Tx = y.$$

Delio Mugnolo

Beispiel.

$X := C([0, 1])$ .

Sei

$$D_1(D) := C^1([0, 1])$$

$$Du := u'.$$

Dann ist  $(D, D_1(D))$  abgeschlossen, denn aus

$\|\cdot\|_\infty$ -Konvergenz von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **und**  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  folgt, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in C^1([0, 1])$  und

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n.$$

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

## Weiteres Beispiel

$G = (E, V)$  abzählbarer Graph

mit Adjazenzmatrix  $A$  und Gradenmatrix

$D := \text{diag}(d(v))_{v \in V}$ , wobei  $d(v) := |\{w \in V : v \sim w\}|$ .

$$\Delta_G := D - A \in M_{|V|}(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow \Delta_G$  ist einen Operator auf  $\ell^2(V)$

Explizit:

$$\Delta_G : (x_v)_{v \in V} \mapsto \left( \sum_{v \sim w} (x_v - x_w) \right)_{v \in V}$$

$\Delta_G$  ist genau dann beschränkt auf  $\ell^2(V)$ , falls  $G$  gleichmäßig lokal endlich ist, d.h.:

$$\exists M > 0 \text{ s.d. } d(v) \leq M \forall v \in V.$$

# Beispiel eines nichtabgeschlossenen Operators

$$X := C([0, 1]), \quad T : D(T) \rightarrow C([0, 1]),$$

$$Tf := f'$$

mit

$$D(T) := \{f \in C^1([0, 1]) : \text{supp}f \subset (0, 1)\}.$$

Seien

$$f_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{falls } t \in [0, n^{-1}], \\ (t - n^{-1})^2 & \text{falls } t \in [n^{-1}, 1]. \end{cases}$$

Dann ist  $f_n \rightarrow f$  und  $f_n \rightarrow f$  in  $X$  mit

$$f(t) := t^2.$$

$T$  ist **nicht** abgeschlossen, da  $\text{supp}f = [0, 1]$  und somit  $f \notin D(T)$ .

# Eigenschaften abgeschlossener Operatoren

$X, Y$  Banachräume,  $T : X \supset D(T) \rightarrow Y$  abgeschlossener Operator

## Lemma

- ▶  $T + B$  ist abgeschlossen  $\forall B \in \mathcal{L}(X, Y)$ .
- ▶ Ist  $\lambda \text{Id} - T$  injektiv für ein  $\lambda \in \mathbb{C}$ , so ist genau dann  $T$  abgeschlossen, wenn  $(\lambda \text{Id} - T)^{-1}$  abgeschlossen ist.
- ▶  $TB$  mit  $D(TB) := \{z \in Z : Bz \in D(T)\}$  ist abgeschlossen  $\forall B \in \mathcal{L}(Z, X)$ .
- ▶  $\ker T$  ist abgeschlossen.

Beweis.

[ ÜA ]



# Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

$X, Y$  Banachräume,  $T : X \supset D(T) \rightarrow Y$  linear

## Theorem.

*Ist  $T$  abgeschlossen mit  $D(T) = X$ , so ist  $T : X \rightarrow Y$  bereits beschränkt.*

## Beweis.

- ▶  $G(T)$  ist ein Banachraum (da abgeschlossener Teilraum von  $X \times Y$ ).
- ▶  $\pi_1 : G(T) \ni (x, Tx) \mapsto x \in X$  ist beschränkt (da  $T$  abgeschlossen), surjektiv (da  $D(T) = X$ ) und injektiv (da  $Tx = 0$  falls  $x = 0$ ).
- ▶ Satz der beschränkten Inverse  $\Rightarrow \pi_1^{-1} : X \ni x \mapsto (x, Tx) \in G(T)$  ist beschränkt.
- ▶ Also ist auch  $T$  stetig.



Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$X, Y$  Banachräume,  $T : X \supset D(T) \rightarrow Y$  linear

**Definition.**

Die **Graphennorm**  $\|\cdot\|_T$  von  $T$  ist

$$\|x\|_T := \|x\|_X + \|Tx\|_Y, \quad x \in D(T).$$

$X, Y$  Banachräume,  $T : X \supset D(T) \rightarrow Y$  linear

## Lemma

$T$  ist genau dann abgeschlossen, wenn  $(D(T), \|\cdot\|_T)$  ein Banachraum ist.

## Beweis.

- ▶ “ $\Rightarrow$ ” Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T)$  s.d.  $\|x_n - x_m\|_T \rightarrow 0$ .
- ▶ Somit sind  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  und  $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$  konvergent.
- ▶  $T$  abgeschlossen  $\Rightarrow x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in D(T)$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tx$ .
- ▶ Somit  $\|x_n - x\|_T \rightarrow 0$ .
- ▶ “ $\Leftarrow$ ” Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T)$  s.d.  $x_n \rightarrow x$  und  $Tx_n \rightarrow y$  (beide in  $X$ ).
- ▶ Dann sind  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy in  $X$ , und somit ist auch  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy in  $(D(T), \|\cdot\|_T)$ .
- ▶  $(D(T), \|\cdot\|_T)$  Banachraum  $\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert in  $(D(T), \|\cdot\|_T)$  – deshalb  $Tx \leftarrow Tx_n \rightarrow y$ .
- ▶ Somit gilt die Aussage.

$X, Y$  normierte Räume,  $S : X \supset D(S) \rightarrow Y$ ,  
 $T : X \supset D(T) \rightarrow Y$

### Definition.

Man sagt,  $S$  ist enthalten in  $T$  oder  $T$  ist eine Erweiterung von  $S$ ,  $S \subset T$ , falls

- ▶  $D(S) \subset D(T)$  und
- ▶  $Sx = Tx \quad \forall x \in D(S)$ .

# Abschließbare und adjungierte Operatoren

$X, Y$  Banachräume,  $S : X \supset D(S) \rightarrow Y$  linear

## Definition.

- ▶ Ist  $S$  nicht abgeschlossen und existiert der kleinste abgeschlossene Operator  $T$ , s.d.  $S \subset T$ , so heißt  $S$  **abschließbar** und  $T$  ihr **Abschluss**,  $T = \overline{S}$ .
- ▶ Ist  $S$  dicht definiert, so ist der **zu  $S$  adjungierte Operator**

$$S' : Y' \supset D(S') \rightarrow X',$$

wobei

$$D(S') := \{y' \in Y' : \exists x' \in X' \text{ s.d. } \langle Sx, y' \rangle = \langle x, x' \rangle\}$$

$$S'y' := x'$$

(Existiert ein solches  $x'$ , so ist es auch eindeutig bestimmt.)

## Anmerkung.

- ▶  $S_1 \subset S_2 \rightarrow S'_2 \subset S'_1$ .
- ▶ Ist  $X = Y$  ein Hilbertraum, so Lemma von Riesz  $\Rightarrow$

$$y' \in D(S') \Leftrightarrow |(Sx|y')| \leq C\|x\|_H \quad \forall x \in D(S).$$

- ▶ Sind  $X, Y$  Hilberträume, so definiert man den **Hilbertraum-adjungierte Operator** durch

$$D(S') := \{y' \in Y : \exists x' \in X \text{ s.d. } (Sx|y') = (x|x')\}.$$

$X, Y$  Banachräume,  $S : X \supset D(S) \rightarrow Y$  linear

## Lemma

$S$  ist genau dann abschließbar, falls  $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(S)$

$$x_n \rightarrow 0 \text{ und } Sx_n \rightarrow z \in X \quad \Rightarrow \quad z = 0.$$

Der Abschluss ist durch

$$G(\bar{S}) = \overline{G(S)}$$

bestimmt.

Beweis.

[ ÜA ]



Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# Beispiel eines abschließbaren Operators

Seien  $X = C([0, 1])$  und  $D(T) = C^\infty([0, 1])$ .  
Dann ist  $T : D(T) \ni u \mapsto u' \in X$  abschließbar.  
Ihr Abschluss ist

$$\begin{aligned} D_1(D) &:= C^1([0, 1]) \\ Du &:= u'. \end{aligned}$$

$H$  Hilbertraum,  $S : H \supset D(S) \rightarrow H$  dicht definiert

Satz.

- (a)  $S'$  ist abgeschlossen.  
 (b)  $S$  ist genau dann abschließbar, wenn  $S'$  dicht definiert ist, und dann gilt

$$\overline{S} = S''.$$

Definition.

Ein Operator  $U \in \mathcal{L}(H)$  heißt **unitär**, falls  $(Ux|Uy) = (x|y)$   
 $\forall x, y \in H$ .

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# Beweis von (a)

- ▶ Sei

$$U : H \times H \ni (x, y) \mapsto (-y, x) \in H \times H.$$

- ▶  $U$  ist unitär  $\Rightarrow U(E^\perp) = (U(E))^\perp \forall E$  Unterraum von  $H$ .
- ▶ Sei  $(x, y) \in H$ . Dann

$$\begin{aligned}(x, y) \in U(G(S))^\perp &\Leftrightarrow ((x, y) | (-Sz, z)) = 0 \quad \forall z \in D(S) \\ &\Leftrightarrow (x | Sz) = (y | z) \quad \forall z \in D(S) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in G(S').\end{aligned}$$

- ▶ Somit  $G(S') = U(G(S))^\perp$ .
- ▶  $U(G(S))^\perp \subset H \times H$  ist als orthogonaler Raum immer abgeschlossen  $\Rightarrow$  Aussage.

## Beweis von (b)

“ $\Leftarrow$ ”

- ▶  $G(S)$  Vektorraum und  $U^2 = -\text{Id} \Rightarrow$

$$\overline{G(S)} = G(S)^{\perp\perp} = (U^2(G(S)))^{\perp\perp} = (U(U(G(S))))^{\perp\perp} = (U(G(S')))^{\perp\perp}.$$

- ▶ Somit dank (a) ist  $S'$  dicht definiert  $\Leftrightarrow \overline{G(S)}$  ist Graph von  $S''$ .

“ $\Rightarrow$ ”

- ▶ Falls  $S'' = \overline{S}$ , dann ist  $S'$  dicht definiert, **denn sonst**: Sei  $z \in D(S')^{\perp}$ .
- ▶  $(z, 0) \in (G(S'))^{\perp}$ .
- ▶ Somit ist  $U(G(S')^{\perp}) = (U(G(S')))^{\perp}$  nicht der Graph eines linearen Operators.
- ▶ Aber  $S$  abschließbar  $\Rightarrow G(\overline{S}) = \overline{G(S)} = (U(G(S')))^{\perp}$ .  $\zeta$

# Beispiel eines nichtabschließbaren Operators

Sei  $X := L^2(\mathbb{R})$  und

$$D(T) := L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$$

$$Tu := \int_{\mathbb{R}} u(x) dx \cdot u_0$$

für einen Vektor  $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $u_0 \neq 0$ .

Ist  $v \in D(T')$ , so gilt

$$\begin{aligned} (u|T'v)_{L^2} &= (Tu|v)_{L^2} \\ &= (u|1)_{L^2}(u_0|v)_{L^2} \\ &= (u|(u_0|v)1)_{L^2}. \end{aligned}$$

Somit  $T'v = (u_0|v)1$ : aber da  $1 \notin L^2(\mathbb{R})$  muss  $(u_0|v)$  sein, d.h.,  $D(T') \perp u_0$  und somit ist  $D(T') \neq X$  (mit

$T'_{|D(T')} \equiv 0$ )  $\Rightarrow T$  ist nicht abschließbar.

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$X$  Banachraum,  $T : X \supset D(T) \rightarrow X$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

### Definition.

Die **Resolventenmenge**  $\rho(T)$  ist die Menge

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{Id} - T : D(T) \rightarrow X \text{ ist invertierbar und } (\lambda \text{Id} - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

Ist  $\lambda \in \rho(T)$ , so heißt

$$R(\lambda, T) := (\lambda \text{Id} - T)^{-1}$$

**Resolventenoperator** von  $T$  an der Stelle  $\lambda$ .

Das **Spektrum**  $\sigma(T)$  ist die Menge

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T).$$

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

## Anmerkung.

*Ist  $T : X \supset D(T) \rightarrow X$  linear und invertierbar, so ist  $R(\lambda, T)$  genau dann beschränkt, wenn  $T$  abgeschlossen ist (dank dem Satz vom abgeschlossenen Graphen).*

$X$  Banachraum,  $T : X \supset D(T) \rightarrow X$  Operator mit  $\rho(T) \neq \emptyset$   
(und somit notwendigerweise abgeschlossen)

### Satz.

*Ist  $\mathcal{I}$  ein Operatorenideal, so sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (i)  $R(\lambda, T) \in \mathcal{I}$  für ein (und somit für alle)  $\lambda \in \rho(T)$ .
- (ii)  $\iota \in \mathcal{I}$ .

( $\iota$  ist der Einbettungsoperator  $[D(A)] \hookrightarrow X$ .)

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- ▶ Sei  $\lambda \in \rho(T)$ . Dann ist  $\|x\|_\lambda := \|\lambda x - Tx\|_X$  eine äquivalente Norm auf  $[D(T)]$ , denn

$$\begin{aligned}\|x\|_T &= \|R(\lambda, T)(\lambda - T)x\|_X + \|\lambda - Tx\|_X + |\lambda|\|x\|_X \\ &\leq (1 + |\lambda|)(\|R(\lambda, T)\| + 1)\|(\lambda - T)x\|_X =: M\|x\|_\lambda.\end{aligned}$$

- ▶  $R(\lambda, T) : X \rightarrow [D(T)]$  ist also ein Isomorphismus mit beschränkter Inverse  $\lambda - T$ .
- ▶ Nun,  $\iota = R(\lambda, T)(\lambda - T)$  und  $R(\lambda, T) = \iota \circ R(\lambda, T)$ .
- ▶ Idealeigenschaft  $\Rightarrow$  Aussage.

# Spektralabbildungssatz (SAS) für Resolventenoperatoren

$X$  Banachraum,  $T : X \supset D(T) \rightarrow X$  Operator,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

**Satz.**

*Ist  $\rho(T) \neq \emptyset$ , so gilt*

$$\sigma(R(\lambda, T)) \setminus \{0\} = (\lambda - \sigma(T))^{-1} := \{(\lambda - \mu)^{-1} \in \mathbb{C} : \mu \in \sigma(T)\}.$$

*Entsprechende Aussagen gelten auch für  $\sigma_p$ ,  $\sigma_a$ ,  $\sigma_r$ .*

- ▶ Sind  $\mu \neq 0$  und  $\lambda \in \rho(T)$ , so gilt

$$(\mu \text{Id} - R(\lambda, T))x = \begin{cases} \mu ((\lambda - \mu^{-1}) \text{Id} - T) R(\lambda, T)x & \text{falls } x \in X \\ \mu R(\lambda, T) ((\lambda - \mu^{-1}) \text{Id} - T)x & \text{falls } x \in D(T) \end{cases}$$

- ▶ Somit

$$\ker(\mu \text{Id} - R(\lambda, T)) = \ker((\lambda - \mu^{-1}) \text{Id} - T)$$

und

$$\text{Rg}(\mu \text{Id} - R(\lambda, T)) = \text{Rg}((\lambda - \mu^{-1}) \text{Id} - T).$$

- ▶ Definitionen von  $\sigma_p$ ,  $\sigma_a$ ,  $\sigma_r \Rightarrow$  Aussagen.

$X$  Banachraum,  $T : X \supset D(T) \rightarrow X$  Operator,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

### Korollar.

*Hat  $T$  kompakte Resolventenoperatoren, so hat  $T$  reines Punktspektrum. Weiter gilt:*

*Entweder ist  $\sigma(T)$  endlich oder besteht  $\sigma(T)$  aus einer Folge, die  $\infty$  als einziger Häufungspunkt hat.*

## Anmerkung.

Die meisten Eigenschaften von  $\sigma(T)$  und  $\rho(T)$  sind für abgeschlossene, dicht definierte  $T$  gleich wie bei beschränkten  $T$ . Doch gilt jetzt i.A.:

- ▶  $\sigma(T)$  ist i.A. nicht kompakt.
- ▶  $\sigma(T) \neq \emptyset$  i.A..

Z.B.: Sei

$$D_1(D) := C^1([0, 1])$$

$$D_2(D) := \{u \in C^1([0, 1]) : u(1) = 0\}$$

$$Du := u'.$$

- ▶  $\mathbb{C} = \sigma((D, D_1(D)))$ : zu wenige Randbedingungen! Somit  $s \mapsto e^{\lambda s}$  ist Eigenvektor  $\forall \lambda$ .
- ▶  $\emptyset = \rho((D, D_2(D)))$ : zu viele bzw. falsche Randbedingungen!  
Ascoli-Arzelà  $\Rightarrow \sigma = \sigma_p$  und  $\lambda \in \sigma_p \Rightarrow \exists$  Eigenvektor der Form  $e(s) := \alpha e^{\lambda s}$  für ein  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Aber  $e(1) \neq 0$  (und somit  $e \notin D_2(D)$ )  
 $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ .

# Beispiel

## Satz.

Der Operator

$$D(\Delta_N) := \{u \in C^2([0, 1]) : u'(0) = u'(1) = 0\}$$

$$\Delta_N u := u''$$

auf  $C([0, 1])$  hat reines Punktspektrum mit (höchstens) abzählbar vielen Eigenwerte.

## Beweis.

- ▶ Die Gleichung  $u - u'' = f$  hat genau eine Lösung  $\forall f \in C([0, 1])$ .
- ▶ Somit ist  $1 \in \rho(\Delta_N)$ .
- ▶ Ascoli-Arzelà  $\Rightarrow \iota : D(\Delta_N) \rightarrow L^2(0, 1)$  bzw.  $C([0, 1])$  ist kompakt

□

Und für Operatoren auf  $L^p$ -Räume?

# Motivation für die Einführung der Sobolevräume

Betrachte  $f \in C^1([0, 1])$ . Dann gilt die partielle Integrationsformel

$$\int_0^1 f'(x) \overline{g(x)} dx = \left[ f(x) \overline{g(x)} \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 f(x) \overline{g'(x)} dx.$$

$\forall g \in C^1([0, 1])$ .

Inbesondere gilt

$$\int_0^1 f'(x) \overline{g(x)} dx = - \int_0^1 f(x) \overline{g'(x)} dx \quad \forall g \in C_c^1(0, 1)$$

Diese Integralformel definiert eine wesentliche Eigenschaft der diff'baren Funktionen, *sie benötigt aber nur eine f.ü. definierte Funktion.*

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# Sobolev-Räume – 1-dim

$I \subset \mathbb{R}$  offenes Intervall,  $p \in [1, \infty]$

Definition. (S.L. Sobolev 1936)

$f \in L^1_{loc}(I)$  heißt **schwach differenzierbar** falls

$\exists f' := g \in L^1_{loc}(I)$  s.d.

$$\int_I f \overline{h'} \, d\lambda = - \int_I g \overline{h} \, d\lambda$$

$\forall h \in C^1_c(I)$ .

Der **erste  $p$ -Sobolevraum**,  $W^{1,p}(I)$ , ist

$$\{f \in L^p(I) : f \text{ schwach diff'bar mit } f' \in L^p(I)\}.$$



Sergei Lvovich  
Sobolev  
(1908–1989)

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H–B  
Geometrische  
Versionen von H–B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$I \subset \mathbb{R}$  offenes Intervall

Satz.

$\forall f \in W^{1,p}(I) \exists |f'| \in L^p(I)$ .

Beweis.

- Ist  $g$  eine weitere schwache Ableitung von  $f$ , so gilt

$$\int_I (f' - g) \bar{h} \, d\lambda = - \int_I (f - f) \overline{h'} \, d\lambda = 0 \quad \forall h \in C_c^1(I).$$

- $\overline{C_c^1(I)} = L^q(I) \forall q \Rightarrow$

$$\int_I (f' - g) \bar{h} \, d\lambda = 0 \quad \forall h \in L^{p'}(I).$$

- Für  $h := |f' - g|^{p-1} \text{sign}(f' - g)$  gilt somit

$$\|f' - g\|_p^p = 0.$$



Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

## Beispiel.

Sei  $I := (-1, 1)$  und  $f : I \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}$ . Dann gilt  
 $f \notin C^1(I)$  aber  $f \in W^{1,p}(I) \forall p \in [1, \infty]$ , mit

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x \in (-1, 0) \\ 1 & \text{falls } x \in (0, 1). \end{cases}$$

$I \subset \mathbb{R}$  offenes Intervall

Satz.

- ▶  $W^{1,p}(I)$  ist ein Banachraum  $\forall p \in [1, \infty]$ , bzgl.

$$\|f\|_{W^{1,p}} := \left( \|f\|_{L^p}, \|f'\|_{L^p} \right)_{\ell^p} \quad f \in W^{1,p}(I).$$

- ▶  $H^1(I) := W^{1,2}(I)$  ist ein Hilbertraum.

(Aber die Norm

$$\| \|f\| \|_{W^{1,p}} := \left( \|f\|_{L^p}, \|f'\|_{L^p} \right)_{\ell^q} \quad f \in W^{1,p}(I).$$

ist äquivalent  $\forall q \in [1, \infty]$ .)

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

- ▶ Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W^{1,p}(I)$  Cauchy. Somit sind  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy in  $L^p(I)$ .
- ▶  $L^p(I)$  Banachraum  $\Rightarrow \exists f, g \in L^p(I)$  s.d.  $f_n \rightarrow f$  und  $f'_n \rightarrow g$ .
- ▶ Es gilt

$$\int_I f_n \overline{h'} \, d\lambda = - \int_I f'_n \overline{h} \, d\lambda \quad \text{for all } h \in C_c^1(I).$$

- ▶ Somit

$$\begin{aligned} \int_I f \overline{h'} \, d\lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n \overline{h'} \, d\lambda \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f'_n \overline{h} \, d\lambda = - \int_I g \overline{h} \, d\lambda \quad \text{for all } h \in C_c^1(I), \end{aligned}$$

d.h.  $g = f'$  und  $f_n \rightarrow f$  in  $W^{1,p}(I)$ .

Delio Mugnolo

Banach-,  
normierte und  
metrische RäumeAnalytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
TopologienIntermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie $L^p$ -RäumeUnbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$I \subset \mathbb{R}$  offenes Intervall

Beispiel.

$$T : W^{1,p}(I) \ni f \mapsto f' \in L^p(I)$$

*ist ein unbeschränkter Operator auf  $L^p(I)$ . Er ist beschränkt als Operator von  $W^{1,p}(I)$  nach  $L^p(I)$ . Weil  $(D(T), \|\cdot\|_T) = W^{1,p}(I)$  ein Banachraum ist, ist  $T$  abgeschlossen.*

## Sobolev-Räume – N-dim

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$  offenes Gebiet,  $p \in [1, \infty]$

## Definition.

$f \in L^p_{loc}(\Omega)$  heißt **schwach differenzierbar** falls

$\exists \nabla f := (g_1, \dots, g_d) \in (L^1_{loc}(\Omega))^N$  s.d.

$$\int_{\Omega} f(x) \overline{\frac{\partial h}{\partial x_i}(x)} dx = - \int_{\Omega} g_i(x) \overline{h(x)} dx \quad \forall h \in C^1_c(\Omega), \forall i = 1, \dots, N$$

Der **erste p-Sobolevraum**,  $W^{1,p}(\Omega)$ , ist

$W^{1,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : f \text{ schwach diff'bar mit } \nabla f \in (L^p(\Omega))^N\}$ ,

und rekursiv:

$W^{k,p}(\Omega) := \{f \in W^{k-1,p}(\Omega) : f \text{ schwach diff'bar mit } \nabla f \in (W^{k-1,p}(\Omega))^N\}$ .

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# Fundamentales Anwendungsbeispiel

Ist  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$  und gilt

$$\lambda u(x) - u''(x) = f(x), \quad x \in [0, 1]$$

mit

$$u'(0) = u'(1) = 0,$$

so gilt  $\forall \phi \in C_c^1(0, 1)$

$$(\lambda u(x) - u''(x))\overline{\phi(x)} = -f(x)\overline{\phi(x)}, \quad x \in [0, 1],$$

und somit (partielle Integration)

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\overline{\phi(x)} dx &= \int_0^1 (\lambda u(x) - u''(x))\overline{\phi(x)} dx \\ &= \lambda \int_0^1 u(x)\overline{\phi(x)} dx + \int_0^1 u'(x)\overline{\phi'(x)} dx + u'(1)\overline{\phi(1)} - u'(0)\overline{\phi(0)} \\ &= \lambda \int_0^1 u(x)\overline{\phi(x)} dx + \int_0^1 u'(x)\overline{\phi'(x)} dx. \end{aligned}$$

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Somit:

**Definition.**

$u : (0, 1) \rightarrow \mathbb{K}$  heißt **schwache Lösung** von

$$\lambda u(x) - u''(x) = f(x), \quad x \in (0, 1),$$

mit **Neumann-Randbedingungen**

$$u'(0) = u'(1) = 0,$$

falls  $u \in H^1(0, 1)$  und

$$\int_0^1 f(x) \overline{\phi(x)} dx = \lambda \int_0^1 u(x) \overline{\phi(x)} dx + \int_0^1 u'(x) \overline{\phi'(x)} dx \quad \forall \phi \in C_c^1(0, 1).$$

Die Randbedingungen sind in der intergralen Formulierung nur implizit gestellt!

## Theorem.

Sei  $f \in L^2(0, 1)$ . Dann hat

$$\lambda u(x) - u''(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

mit Randbedingungen

$$u'(0) = u'(1) = 0$$

genau eine schwache Lösung  $u_f$ . Weiter gilt

$$\exists C > 0 \quad \text{s.d.} \quad \|u_f\|_{H^1} \leq C \|f\|_{L^2} \quad \forall f \in L^2(0, 1).$$

- ▶ Definiere ein äquivalentes Skalarprodukt auf  $H^1(0, 1)$  durch  $\lambda(u|v)_{L^2} + (u'|v')_{L^2} \quad \forall u, v \in H^1(0, 1)$ .
- ▶ Sei  $f \in L^2(0, 1)$  und definiere

$$\Psi : H^1(0, 1) \ni \phi \mapsto (\phi|f)_{L^2} \in \mathbb{K}.$$

- ▶  $\Psi \in (H^1(0, 1))'$
- ▶ Riesz-Fréchet  $\Rightarrow \exists |u \in H^1(0, 1)$  s.d.  $\langle \Psi, \phi \rangle = (\phi|u)_{H^1}$   
 $\forall \phi \in H^1(0, 1)$
- ▶ Somit  $(\phi|f)_{L^2} = \lambda(\phi|u)_{L^2} + (\phi'|u')_{L^2}$ :  $u$  ist schwache Lösung.
- ▶ Isometrie des Identifikationsoperator  $H^1(0, 1) \leftrightarrow (H^1(0, 1))' \Rightarrow$   
*a-priori*-Abschätzung  $\|u_f\|_{H^1} \leq \|f\|_{(H^1)'}$ .
- ▶  $H^1(0, 1) \leftrightarrow L^2(0, 1) \simeq (L^2(0, 1))' \hookrightarrow (H^1(0, 1))' \Rightarrow$   
*a-priori*-Abschätzung  $\|u_f\| \leq \|f\|_{L^2}$ .

Viele weitere Eigenschaften von Sobolev-Räumen sind bekannt, sie beruhen aber eher auf Methode der PDGn bzw. spielen eher in den PDGn eine Rolle: z.B.

- ▶ Schwache Differenzierbarkeit  $\Leftrightarrow$  Differenzierbarkeit f.ü.;
- ▶ schwache Ableitung(en) f.ü.  $\equiv 0 \Rightarrow$  Funktion ist konstant f.ü.;
- ▶ Möglichkeit, Sobolev-Räume  $W^{k,p}(\Omega)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  zu definieren;
- ▶ Möglichkeit, einen *beschränkten* Punktauswertungsoperator  $W^{k,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$  zu definieren, für  $k$  groß genug;

- ▶ Existenz äquivalenter Normen  $W^{k,p}(\Omega)$ , die Mittelwerte oder Randwerte der Funktionen beinhalten (Poincaré-Ungleichungen);
- ▶ Dichtheit von  $C^\infty(\Omega)$  in  $W^{k,p}(\Omega)$  für alle  $k, p$  (Theorem von Meyers–Serrin, 1964);
- ▶ Möglichkeit, Sobolev-Räume  $W^{k,p}(\Xi)$  für allgemeinere Mannigfaltigkeiten zu definieren;
- ▶ Möglichkeit, Sobolev-Räume  $W^{s,p}(\Xi)$  für  $s \in \mathbb{R}$  zu definieren;
- ▶ Möglichkeit, Sobolev-Räume durch Fourier-Transformationen (äquivalent) zu definieren;
- ▶ Einbettungen von  $W^{k,p}(\Omega)$  in  $L^q(\Omega)$  bzw.  $C(\overline{\Omega})$  für  $k, p$  groß genug (Sobolevsche Einbettungssätze);
- ▶ Möglichkeit, Sobolevräume auf atomische Maßräume zu definieren (Sobolevräume auf Graphen);
- ▶ ...

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H–B  
Geometrische  
Versionen von H–B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

Delio Mugnolo

$I$  offenes Intervall,  $p \in (1, \infty]$

**Theorem.**

*Ist  $I$  beschränkt, so gilt*

$$W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$$

*mit kompakter Einbettung.*

**Korollar.**

*Ist  $I$  beschränkt, so ist die Einbettung*

$$W^{1,p}(I) \hookrightarrow L^p(I)$$

*kompakt.*

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# Vorbereitendes Resultat

$I$  offenes Intervall,  $p \in [1, \infty]$

Satz.

- (1) Sei  $g \in L^1_{loc}(I)$  und  $x_0 \in I$ . Sei  
 $G : I \ni x \mapsto \int_{x_0}^x g(t) dt \in \mathbb{K}$ . Dann ist  $G \in C(I)$  und

$$\int_I G(x) \overline{h'(x)} dx = - \int_I g(x) \overline{h(x)} dx \quad \forall h \in C_c^1(I).$$

- (2) Somit  $\forall f \in W^{1,p}(I) \exists |f^* \in C(\bar{I})$  s.d.  $f(x) = f^*(x)$  für  
 f.a.  $x \in I$  und

$$\|f^*\|_{C(\bar{I})} \leq \|f\|_{W^{1,p}(I)} \quad \forall f \in C([0, 1]),$$

kurz:  $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$ .

Beweis.

[ ÜA ]

▶ Sei  $u \in \{f \in W^{1,p}(I) : \|f\|_{W^{1,p}} \leq 1\}$ .

▶ Dann gilt für  $q^{-1} = 1 - p^{-1}$

$$|u(x) - u(y)| = \left| \int_x^y u'(s) ds \right| \leq \|u'\|_p \| \mathbf{1}_{(x,y)} \|_q \leq |x - y|^{\frac{1}{q}}.$$

▶ Somit ist  $\{f \in W^{1,p}(I) : \|u\|_{W^{1,p}} \leq 1\}$  gleichgradig stetig.

▶  $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\bar{I}) \Rightarrow \{f \in W^{1,p}(I) : \|f\|_{W^{1,p}} \leq 1\}$  ist beschränkt.

▶ Ascoli-Arzelà  $\Rightarrow$  Aussage.

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$  offenes Gebiet mit  $C^1$ -Rand,  $p \in (1, \infty)$

Satz. (F. Rellich 1930 & V.I. Kondrachov 1945)

*Ist  $\Omega$  beschränkt, so ist die Einbettung*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

*kompakt.*

# 1. Vorbereitendes Resultat

$(M, d_M)$  metrischer Raum

Lemma (H. Hanche-Olsen & H. Holden 2010)

$M$  ist präkompakt, falls  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \exists (W, d_W)$  metrischer Raum  $\exists \Phi : M \rightarrow W$  s.d.

- ▶  $\Phi(M)$  ist präkompakt und
- ▶  $\forall x, y \in M \ d_W(\Phi(x), \Phi(y)) < \delta \Rightarrow d_M(x, y) < \epsilon$ .

Beweis.

- ▶ Sei  $\epsilon > 0$  und betrachte  $\delta, W, \Phi$ .
- ▶  $\Phi(M)$  präkompakt  $\Rightarrow \exists W' \subset \Phi(M)$  s.d.
  - ▶  $W'$  ist endlich und
  - ▶  $\Phi(M) \subset \bigcup_{y \in W'} B_\delta(y)$ .
- ▶ Deshalb auch
  - ▶  $\Phi^{-1}(W')$  ist endlich und
  - ▶  $M \subset \bigcup_{x \in \Phi^{-1}(W')} B_\epsilon(x)$ .

## 2. Vorbereitendes Resultat

$$p \in (1, \infty), X \subset L^p(\mathbb{R}^N)$$

Theorem. (A.N. Kolmogorov 1931 & M. Riesz 1933)

$X$  ist genau dann relativ kompakt, wenn

- (1)  $X$  beschränkt ist,
- (2)  $\forall \epsilon > 0 \exists R > 0$  s.d.  $\forall f \in X$

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |f(x)|^p dx < \epsilon^p,$$

- (3)  $\forall \epsilon > 0 \exists \rho > 0$  s.d.  $\forall f \in X \forall y \in \mathbb{R}^N$

$$\|y\| < \rho \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+y) - f(x)|^p dx < \epsilon^p.$$

$$p \in (1, \infty), X \subset L^p(\mathbb{R}^N)$$

### Korollar.

Ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  offen mit  $|\Omega| < \infty$ , so ist  $\{f|_{\Omega} : \Omega \rightarrow \mathbb{K} : f \in X\}$  relativ kompakt in  $L^p(\Omega)$ , falls

- (1)  $X$  beschränkt ist,
- (2)  $\forall \epsilon > 0 \exists \rho > 0$  s.d.  $\forall f \in X \forall y \in \mathbb{R}^N$

$$\|y\| < \rho \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+y) - f(x)|^p dx < \epsilon^p.$$

# Beweis [Hanche-Olsen-Holden 2010] - "⇒" 1

- ▶ Sei  $\epsilon > 0$  und wähle  $R, \rho$  wie in (2) bzw. (3).
- ▶ Sei  $Q := \prod_{i=1}^N (-a_i, a_i) \subset \mathbb{R}^N$  mit  $a_i$  klein genug, dass  $Q \subset B_{\frac{\rho}{2}}(0)$ .
- ▶ Seien  $Q_1, \dots, Q_m$  Kopien von  $Q$  s.d.  $B_R(0) \subset \overline{\bigcup_{j=1}^m Q_j}$ .
- ▶ Definiere  $P \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^N))$  f.ü. durch

$$(Pf)(x) := \begin{cases} |Q_i|^{-1} \int_{Q_i} f(z) dz & \text{falls } x \in Q_i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- ▶ (2) ⇒

$$\begin{aligned} \|f - Pf\|_p^p &< \epsilon^p + \sum_{j=1}^m \int_{Q_j} |f(x) - Pf(x)|^p dx \\ &= \epsilon^p + \sum_{j=1}^m \int_{Q_j} \left| |Q_j|^{-1} \int_{Q_j} (f(x) - f(z)) dz \right|^p dx. \end{aligned}$$

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# Beweis [Hanche-Olsen-Holden 2010] - "⇒" 2

- ▶ Da  $x - z \in 2Q \forall x, z \in Q_j$ , Jensen und (3) ⇒

$$\begin{aligned}\|f - Pf\|_p^p &\leq \epsilon^p + \sum_{j=1}^m \int_{Q_j} |Q_j|^{-1} \int_{Q_j} |f(x) - f(z)|^p dz dx \\ &= \epsilon^p + \sum_{j=1}^m \int_{Q_j} |Q_j|^{-1} \int_{2Q} |f(x) - f(x+y)|^p dy dx \\ &= \epsilon^p + |Q|^{-1} \int_{2Q} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x) - f(x+y)|^p dx dy \\ &= \epsilon^p + |Q|^{-1} \int_{2Q} \epsilon^p dy = (2^N + 1)\epsilon^p.\end{aligned}$$

- ▶ Somit  $\|f\|_p < (2^N + 1)^{\frac{1}{p}} \epsilon + \|Pf\|_p \forall f \in X$ .
- ▶  $\|Pf - Pg\|_p < \epsilon \Rightarrow \|f - g\|_p < ((2^N + 1)^{\frac{1}{p}} + 1)\epsilon \forall f \in X$ .
- ▶  $\|P\| \leq 1$  und  $X$  beschränkt ⇒  $P(X)$  ist beschränkt und endlich-dimensional, somit relativ kompakt.
- ▶ Lemma von Hanche-Olsen-Holden ⇒  $X$  ist relativ kompakt.

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H-B  
Geometrische  
Versionen von H-B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

# Beweis [Hanche-Olsen-Holden 2010] - “ $\Leftarrow$ ” 1

- ▶ Relativ kompakte Mengen sind immer beschränkt  $\Rightarrow$  (1).
- ▶ Sei  $\epsilon > 0$  und  $X' \subset X$  endlich s.d.  $X \subset \bigcup_{f \in X'} B_\epsilon(f)$ . Sei  $R > 0$  groß genug dass

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |f(x)|^p dx < \epsilon^p \quad \forall f \in X'.$$

- ▶ Ist  $f \in X'$  und  $g \in B_\epsilon(f)$ , so gilt

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \left( \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|f - g\|_p + \left( \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < 2\epsilon \end{aligned}$$

und somit gilt (2).

# Beweis [Hanche-Olsen-Holden 2010] - “ $\Leftarrow$ ” 2

- ▶ Es reicht z.z., dass (3) gilt.
- ▶ (3) gilt automatisch für einzelne Funktionen, da  $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$  dicht in  $L^p(\mathbb{R}^N)$  ist.
- ▶ Sei  $\epsilon > 0$  und  $X' \subset X$  endlich s.d.  $X \subset \bigcup_{f \in X'} B_\epsilon(f)$ . Sei  $\rho > 0$  klein genug dass

$$y \in B_\rho(0) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+y) - f(x)|^p dx < \epsilon^p \quad \forall f \in X'.$$

- ▶ Ist  $f \in X'$  und  $g \in B_\epsilon(f)$ , so gilt

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |g(x+y) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^N} |g(x+y) - f(x+y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \left( \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+y) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \left( \int_{\mathbb{R}^N} |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < 3\epsilon \end{aligned}$$

und somit gilt (3).

### 3. vorbereitendes Resultat

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$  offenes Gebiet mit  $C^1$ -Rand

Theorem.

$\exists \Theta \in \mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), W^{1,p}(\mathbb{R}^N))$  und  $\exists C > 0$  s.d.

- ▶  $(\Theta u)|_{\Omega} = u,$
- ▶  $\|\Theta u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{L^p(\Omega)}$  und
- ▶  $\|\Theta u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

$\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$ .  $\Theta$  heißt **Erweiterungsoperator**.

Der Beweis ist sehr technisch und langwierig, vgl. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Thm. 9.7.

## 4. Vorbereitendes Resultat

$$p \in [1, \infty]$$

### Lemma

Ist  $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ , so gilt

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x+y) - f(x)|^p dx \leq \|\nabla f\|_p^p |y|^p \quad \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

Zum Beweis: s. z.B. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Prop. 9.3.

# Beweis des Satzes von Rellich–Kondrachov

- ▶ Sei  $B := \{f \in W^{1,p}(\Omega) : \|f\|_{W^{1,p}} \leq 1\}$ .
- ▶  $\Omega$  hat  $C^1$ -Rand  $\Rightarrow \exists \Theta$  Erweiterungsoperator.
- ▶  $\Theta(B)$  ist beschränkt in  $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  und somit in  $L^p(\mathbb{R}^N)$ .
- ▶ Voriges Lemma  $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+y) - f(x)|^p dx \leq \|\nabla f\|_p^p |y|^p \quad \forall y \in \mathbb{R}^N$   
 $\forall f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ .
- ▶ Somit

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x+y) - f(x)|^p dx \leq C|y|^p \quad \forall y \in \mathbb{R}^N \quad \forall f \in \Theta(B).$$

- ▶ Kolmogorov–Riesz  $\Rightarrow$  Aussage.

# Eine Anwendung an Differenzialgleichungen

Um die Gleichung

$$\lambda u(x) - u''(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

mit Neumann-Randbedingungen

$$u'(0) = u'(1) = 0$$

zu untersuchen müsste man den Operator

$$\begin{aligned} D(\Delta_N) &:= \{u \in H^2(0,1) : u'(0) = u'(1) = 0\} \\ \Delta_N u &:= u'' \end{aligned}$$

auf  $L^2(0,1)$  einführen.

Oder: man führt den Operator nur “schwach” ein – man kann mit PDGn-Methoden zeigen, dass die beiden Definitionen übereinstimmen.

## Schwache 2. Ableitung mit Neumann-Randbedingungen

Satz.

*Der Operator*

$$D(\Delta_N) := \{u \in H^1(0, 1) : \exists v \in L^2(0, 1) \text{ s.d.} \\ (u', w')_{L^2} = (v|w) \forall w \in H^1(0, 1)\}$$

$$\Delta_N u := -v$$

*auf  $L^2(0, 1)$  hat reines Punktspektrum mit (höchstens) abzählbar vielen Eigenwerte.*

**Beweis.**

- ▶ Die Gleichung  $(u|w)_{L^2} - (\Delta_N u|w)_{L^2} = (f|w)_{L^2} \forall w \in H^1(0, 1)$  hat genau eine Lösung  $u_f \forall f \in L^2(0, 1)$ .
- ▶ Somit ist  $1 \in \rho(\Delta_N)$ .
- ▶ Rellich–Khondrakov  $\Rightarrow \iota : D(\Delta_N) \rightarrow L^2(0, 1)$  ist kompakt.

Banach-,  
normierte und  
metrische Räume

Analytische  
Versionen von H–B  
Geometrische  
Versionen von H–B

Funktionale

Reflexive Räume  
und schwache  
Topologien

Intermezzo:  
Hilberträume

Kompaktheit

Allgemeine  
spektrale Theorie

$L^p$ -Räume

Unbeschränkte  
Operatoren und  
Sobolev-Räume

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$  offenes Gebiet

Satz.

- ▶  $W^{1,p}(\Omega)$  ist gleichmäßig konvex (und somit reflexiv)  
 $\forall p \in (1, \infty)$ .
- ▶  $W^{1,p}(\Omega)$  ist separabel  $\forall p \in [1, \infty)$ .

Lemma

*Ist ein Banachraum  $X$  gleichmäßig konvex, so ist auch jeder abgeschlossener Unterraum von  $X$  gleichmäßig konvex.*

Beweis.

Einfach die Definition von glm. konv. anwenden. □

- ▶  $L^p(\Omega)$  gleichmäßig konvex/reflexiv  $\Rightarrow (L^p(\Omega)) \simeq L^p(\tilde{\Omega})$   
gleichmäßig konvex/reflexiv, wobei  $\tilde{\Omega}$  die Vereinigung  $n$  disjunkter  
Kopien von  $\Omega$  ist.
- ▶  $T : W^{1,p}(\Omega) \ni f \mapsto (f, \text{grad}f) \in (L^p(\Omega))^N$  ist eine Isometrie.
- ▶ Somit ist  $T(W^{1,p}(\Omega))$  abgeschlossener Unterraum von  
 $(L^p(\Omega))^N$ .
- ▶ Somit ist  $T(W^{1,p}(\Omega))$  und auch  $W^{1,p}(\Omega)$  gleichmäßig  
konvex/reflexiv. [ Warum? ÜA ]