

Advanced Topics in the Calculus of Variations

Lösungen Blatt 2

A6) (a) siehe A1) (a).

(b) Angenommen $\exists x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2$

$$F(x_1) = F(x_2) = \inf_{x \in X} F(x)$$

Wegen der strikten Konvexität gilt

$$F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{1}{2} (F(x_1) + F(x_2)) = \inf_{x \in X} F(x),$$

ein Widerspruch.

A7) (a) Siehe A2) (a)

(b) Siehe A2) (b)

(c) Siehe A2) (c)

(d) $F[u] = \int_{\Omega} F(Du(x)) dx$ $F \in C^0(\mathbb{R}^n)$, $F \geq 0$,
($u \in W^{1,p}(\Omega)$) F konvex.

$\geq F$ schwach unterhalbstetig

Nach A7 b) genügt es zu zeigen, dass

F unterhalbstetig & konvex ist.

1) Konvexität. Seien $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, $\lambda \in (0, 1)$

$$F[\lambda u + (1-\lambda)v] = \int_{\Omega} F(D(\lambda u + (1-\lambda)v)(x)) dx$$

$$= \int_{\Omega} F(\lambda Du(x) + (1-\lambda)Dv(x)) dx$$

$$\leq \int_{\Omega} [\lambda F(Du(x)) + (1-\lambda)F(Dv(x))] dx$$

$$= \lambda \int_{\Omega} F(Du(x)) dx + (1-\lambda) \int_{\Omega} F(Dv(x)) dx$$

$$= \lambda F[u] + (1-\lambda)F[v].$$

2) Unterhalbstetigkeit

$$\text{Sei } u_n \xrightarrow{W^{1,p}} u. \quad \mathbb{R} \quad F[u] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F[u_n]$$

$$u_n \xrightarrow{W^{1,p}} u \implies Du_n \xrightarrow{L^p} Du.$$

Wähle $(u_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ Teilfolge sodass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F[u_{n_k}] = \liminf_{n \rightarrow \infty} F[u_n], \quad (*)$$

Da $Du_{n_k} \xrightarrow{L^p} Du$ gibt es eine Teilfolge $(n_{k_\ell})_{\ell=1}^{\infty}$

sodass $Du_{n_{k_\ell}} \rightarrow Du$ Lebesgue-fast-überall.

Mit dem Lemma von Fatou folgt:

$$F[u] = \int_{\Omega} F(Du(x)) dx = \int_{\Omega} \liminf_{\ell \rightarrow \infty} F(Du_{n_{k_\ell}}(x)) dx$$

$$\leq \liminf_{\ell \rightarrow \infty} \int_{\Omega} F(Du_{n_{k_\ell}}(x)) dx = \liminf_{\ell \rightarrow \infty} F[u_{n_{k_\ell}}]$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} F[u_{n_k}] \stackrel{(*)}{=} \liminf_{n \rightarrow \infty} F[u_n]$$

es existiert
da (*)

$\implies$ Beh

1) & 2) $\implies F$ ist schwach unterhalbstetig

$$(e) (i) \geq \forall \varphi \in L^\infty(0,1)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 u(jx) \varphi(x) dx \stackrel{(*)}{=} \int_0^1 [ka + (1-a)b] \varphi(x) dx$$

Hilfreich $\varphi \in L^\infty(0,1) \implies \varphi$ ist gleich mäßig

Grenzwert von messbaren einfachen Fkt. auf $(0,1) \setminus N$ für eine Nullmenge N

[Bew] $\varphi \in L^\infty(0,1)$ oBdA $\varphi \geq 0$ (sonst $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$)

$$\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n \cdot 2^n} \frac{k}{2^n} \chi_{\varphi^{-1}([\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}])} \quad \boxed{\text{sgm}}$$

Wir zeigen (*) zunächst für einfache Funktionen:

Es sei zunächst $\varphi = \chi_{[\alpha, \beta]}$ für $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 u(jx) \varphi(x) dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_\alpha^\beta u(jx) dx$$

$$= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \int_{\alpha j}^{\beta j} u(s) ds$$

$$\stackrel{(\dagger)}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \left(R_j^\alpha + R_j^\beta + \sum_{k=\tau_{\alpha j}}^{L[\beta j]-1} \underbrace{\int_k^{k+1} u(s) ds}_{= ka + (1-a)b} \right)$$

Wobei: $|R_j^\alpha| = \left| \int_{\alpha j}^{\tau_{\alpha j}} u(s) ds \right| \leq \max\{|a|, |b|\} (\tau_{\alpha j} - \alpha j)$

(2) $|R_j^\beta| = \left| \int_{L[\beta j]}^{\beta j} u(s) ds \right| = \max\{|a|, |b|\} (\beta j - L[\beta j])$

$$\implies \frac{1}{j} |R_j^\alpha| \leq \max\{|a|, |b|\} \left(\frac{\tau_{\alpha j}}{j} - \alpha \right) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

Analog $R_j^\beta \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty)$

$$\Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 u(jx) \varphi(x) dx \stackrel{(\ast)}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} (\lambda a + (1-\lambda)b) \left(\frac{|\beta_1| - |\alpha_1|}{j} \right)$$

$$= [\lambda a + (1-\lambda)b] (\beta - \alpha) = (\lambda a + (1-\lambda)b) \int_0^1 \varphi(x) dx$$

gleiches gilt falls $\varphi = \chi_{(\alpha, \beta)}$ oder $\varphi = \chi_{[\alpha, \beta]}$, $\varphi = \chi_{(\alpha, \beta]}$
(Beweis analog)

Nun definiere

$$\Sigma := \left\{ E \in \underbrace{\mathcal{B}(0,1)}_{\text{Borel-}\sigma\text{-Algebra}} \mid \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 u(jx) \chi_E(x) dx = (\lambda a + (1-\lambda)b) |E| \right\}$$

Wir zeigen: Σ ist σ -Algebra

• $(0,1) \in \Sigma$ wegen Überlegung oben.

• $E \in \Sigma \Rightarrow (0,1) \setminus E \in \Sigma$

denn

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 u(jx) \chi_{(0,1) \setminus E}(x) dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 u(jx) - \int_0^1 u(jx) \chi_E(x) dx$$

$$= (\lambda a + (1-\lambda)b) - (\lambda a + (1-\lambda)b) |E| = (\lambda a + (1-\lambda)b) |(0,1) \setminus E|.$$

• $(E_i)_{i=1}^\infty \subset \Sigma$ disjunkt $\exists E = \bigcup_{i=1}^\infty E_i \in \Sigma$, Sei $N \in \mathbb{N}$ fix,

$$\text{Setze } F_N = \bigcup_{i=1}^N E_i. \left[\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 u(jx) \chi_{E \setminus F_N}(x) dx \right| = \sum_{n=N}^\infty |E_n| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \right]$$

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 u(jx) \chi_E(x) dx - (\lambda a + (1-\lambda)b) |E| \right|$$

$$\leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \left[\left| \int_0^1 u(jx) \chi_{E \setminus F_N}(x) dx \right| + (\lambda a + (1-\lambda)b) |E \setminus F_N| \right]$$

$$+ \left| \int_0^1 u(jx) \chi_{F_N}(x) dx - (\lambda a + (1-\lambda)b) |F_N| \right|$$

$$= \sum_{k=1}^N \left| \int_0^1 u(jx) \chi_{E_k}(x) dx - (\lambda a + (1-\lambda)b) |E_k| \right|$$

$$= \sum_{k=1}^N |E_k|$$

$$\leq \max\{|a|, |b|\} |E|_{F_N} + |\lambda a + (1-\lambda)b| |E|_{F_N}$$

$$+ \limsup_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \underbrace{\left| \int u(jx) \chi_{E_k}(x) dx - [\lambda a + (1-\lambda)b] |E_k| \right|}_{\xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}}$$

$(j \rightarrow \infty)$

$$\leq [\max\{|a|, |b|\} + |\lambda a + (1-\lambda)b|] |E|_{F_N}$$

$$\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

$\Rightarrow \Sigma$ ist σ -Algebra. Da Σ nach obiger

Überlegung auch einen Erzeuger der

Borel σ -Algebra enthält gilt $\Sigma = \mathcal{B}(I)$.

Problem Wir benötigen (*) für Lebesgue-messbare Mengen.

Sei $E \subset (0,1)$ Lebesgue messbar

$$\Rightarrow \lambda(E) = \sup \{ \lambda(K) \mid K \subset E \text{ kompakt} \}$$

Wähle nun (K_n) eine Folge von Teilmengen von E mit $\lambda(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(K_n)$. Setze $\bar{K} := \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$

Dann: $\bar{K} \subset E$ und $\bar{K} \in \mathcal{B}(I)$ (da kompakte Mengen stets Borel sind)

$$\lambda(E) = \lambda(\bar{K}) \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \lambda(K_n) = \lambda(E)$$

$$\Rightarrow \lambda(E \setminus \bar{K}) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Nun} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int u(jx) \chi_E(x) dx &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int u(jx) \chi_{\bar{K}}(x) dx \\ &= (\lambda a + (1-\lambda)b) |\bar{K}| = (\lambda a + (1-\lambda)b) |E|. \end{aligned}$$

$\Rightarrow (*)$ gilt für $\varphi = \varphi_k \in F \subset C[1]$ Lebesgue messbar

Nun wegen Linearität gilt $(*)$ für einfache Funktionen.

Sei nun $\varphi \in L^\infty(0,1)$ beliebig. Wähle (φ_k) Folge

von einfachen Funktionen sodass $\varphi_k \xrightarrow[\text{NM}]{\text{gleichmäßig}} \varphi$

$$\begin{aligned} & \limsup_{j \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 u(jx) \varphi(x) dx - \int_0^1 (ka + (1-k)b) \varphi_k(x) dx \right| \\ & \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 \overbrace{u(jx)}^{\leq \max(|a|, |b|)} (\varphi - \varphi_k)(x) dx \right| + \left| \int_0^1 (ka + (1-k)b) (\varphi - \varphi_k)(x) dx \right| \\ & \quad + \underbrace{\left| \int_0^1 u(jx) \varphi_k(x) dx - \int_0^1 (ka + (1-k)b) \varphi_k(x) dx \right|}_{\xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0} \end{aligned}$$

$$\leq \max(|a|, |b|) \|\varphi - \varphi_k\|_{L^\infty} + |ka + (1-k)b| \|\varphi - \varphi_k\|_{L^\infty}$$

$$\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

(e)(ii) Sei $(u_j)_{j=1}^\infty$ wie in Teil A7(e)(i).

Dann $F(ha + (1-h)b)$

$$= \int_0^1 F(ha + (1-h)b) dx = \int_0^1 F(u_\infty(x)) dx$$

$$= F[u_\infty] \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} F[u_j]$$

$$= \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 F(u_j(x)) dx$$

$\left\{ \begin{array}{l} F(a) \text{ auf } \bigcup_{k=1}^j \left[\frac{k-1}{j}, \frac{k-1+h}{j} \right] \\ F(b) \text{ auf } \bigcup_{k=1}^j \left[\frac{k-1+h}{j}, \frac{k}{j} \right] \end{array} \right.$

$$= \liminf_{j \rightarrow \infty} F(a) \left| \bigcup_{k=1}^j \left[\frac{k-1}{j}, \frac{k-1+h}{j} \right] \right|$$
$$+ F(b) \left| \bigcup_{k=1}^j \left[\frac{k-1+h}{j}, \frac{k}{j} \right] \right|$$

$= \frac{1-h}{j} \cdot j = (1-h)$

$$= hF(a) + (1-h)F(b).$$

A8] (a) ~~siehe~~ siehe Aufgabe 4(a)

(b) siehe Aufgabe 4(c).

A9] (a) $f \in \text{Lip}(\mathbb{R}^d) \supseteq f|_{\Omega} \in W^{1,\infty}(\Omega)$,

• $f \in L^\infty(\Omega)$ klar. Sei L die Lipschitzkonstante von f .

Zur schwachen Riffbarkeit

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} f \partial_j \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \partial_j \varphi(x) \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x + \frac{1}{n} e_j) - \varphi(x)}{\frac{1}{n}} \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f(x) \frac{\varphi(x + \frac{1}{n} e_j) - \varphi(x)}{\frac{1}{n}}}_{\text{bad by } \|f\|_{L^\infty(B_1(\text{supp } \varphi))} \|\varphi'\|_{L^\infty}}$$

$$\stackrel{\text{Leibniz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x + \frac{1}{n} e_j) \, dx - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) f(x) \, dx \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x - \frac{1}{n} e_j) \varphi(x) \, dx - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) f(x) \, dx \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\frac{f(x - \frac{1}{n} e_j) - f(x)}{\frac{1}{n}}}_{1 \leq L|e_j| = L} \varphi(x) \, dx$$

$$\Rightarrow \int f \partial_j \varphi(x) \leq L \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)| dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$\Rightarrow \int f \partial_j \varphi \leq L \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in \underbrace{C_0^\infty(\Omega)}_{(0) \text{ Dichte Teilmenge von } L^2(\Omega)}$$

$$\stackrel{FA}{\Rightarrow} T(\varphi) := \int_{\Omega} f \partial_j \varphi \quad \text{besitzt eine eindeutige}$$

stetige Fortsetzung $\overline{T} : \underbrace{C_0^\infty(\Omega)}_{= L^2(\Omega)} \xrightarrow{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}} \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \overline{T} \in L^2(\Omega)^* \Rightarrow \exists v \in L^\infty(\Omega):$$

$$\overline{T}(\varphi) = \int v \varphi dx \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega)$$

Inbesondere für $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int f \partial_j \varphi = T(\varphi) = \overline{T}(\varphi) = \int v \varphi dx \quad \text{in Richtung } x_j$$

Definition
 $\xRightarrow{\text{schw. BSL}}$

f ist schwach diff'bar mit schwacher

$$\text{Ableitung } \partial_j f = -v_j \in L^\infty(\Omega),$$

$\Rightarrow$ war
 $\xRightarrow{\text{beliebig}}$

$$f \in W^{1,\infty}(\Omega)$$

(b)

$$\bar{f}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{f}(y) := \inf_{x \in \mathbb{R}^d} \{ f(x) + L|y-x| \}.$$

1) $\bar{f}$ wohldefiniert da $\inf_{x \in \mathbb{R}^d} \dots \in \mathbb{R}$ weil

$$f(x) + L|y-x| \geq \inf_{z \in \mathbb{R}^d} f(z) > -\infty, \text{ da } f \in \text{Lip}(\mathbb{R}^d),$$

2) $\bar{f}$ Lipschitz denn seien $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d$

$$\text{Nun gilt } \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d \quad f(x_n) + L|y_2 - x_n| \rightarrow \bar{f}(y_2)$$

Damit:

$$\bar{f}(y_1) - \bar{f}(y_2)$$

$$\leq (f(x_n) + L|y_1 - x_n| - (f(x_n) + L|y_2 - x_n|))$$

$$= L(|y_1 - x_n| - |y_2 - x_n|) \leq L|y_1 - y_2|$$

$$\stackrel{\text{inv. Ungl.}}{\leq} L|y_1 - y_2|$$

$$\text{Analog } \bar{f}(y_2) - \bar{f}(y_1) \leq L|y_2 - y_1| \Rightarrow \text{Beh.}$$

3) $\bar{f}|_{\mathbb{R}} = f$ denn sei $y \in \mathbb{R}$

Dann gilt

$$\underline{1)} \quad \bar{f}(y) \leq f(y) + L|y-y| = f(y)$$

aber auch

$$\bar{f}(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{ f(x) + L|x-y| \} = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{ f(x) - f(y) + L|x-y| \} + f(y)$$

$$\geq \inf_{x \in \Omega} \left\{ \underbrace{L|x-y| - |f(x) - f(y)|}_{\geq 0} + f(y) \right\}$$

$$\geq f(y)$$

A10]

(a) Sei $w \in W_{loc}^{1,1}(\Omega; \mathbb{R}) : Dw = v$ und

$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann gilt:

$$\int_{\Omega} v^i \partial_j \varphi \, dx = \int_{\Omega} \partial_i w \underbrace{\partial_j \varphi}_{\in C_0^\infty(\Omega)} \, dx$$

Def schw. Ableitg $-\int w \partial_i (\partial_j \varphi) \, dx$

Schwarz $-\int w \partial_j \underbrace{(\partial_i \varphi)}_{\in C_0^\infty(\Omega)} \, dx$

Def schw. Ableitg $\int \partial_j w \partial_i \varphi \, dx$

$= \int v^j \partial_i \varphi \, dx \quad \text{gel.}$

(b) Erinnerung: (Integralmittel und Poincaré-Ungleichung)

Sei $A_{\Omega} := \left\{ f \in W^{1,1}(\Omega) : \int_{\Omega} f \, dx = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f \, dx = 0 \right\}$ $\left(\int_{\Omega} f \, dx = 0 \right)$

Dann gibt es $C = C(\Omega) > 0$ sodass $\forall f \in A_{\Omega}$

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} \leq C \|Df\|_{L^1(\Omega)}$$

Lösung der Aufgabe: Sei $(\varphi_{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ der Standard-Mollifier, d.h. $\text{supp}(\varphi_{\varepsilon}) \subset B_{\varepsilon}(0)$, $0 \leq \varphi_{\varepsilon} \leq 1$, $\varphi_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ für ein $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$

Sei $\varepsilon_0 > 0$. Beh. Für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0/2$ gilt

$$\partial_j (v^i \varphi_{\varepsilon}) = \partial_i (v^j \varphi_{\varepsilon}) \quad \text{auf } B_{1-\varepsilon_0}(0).$$

OBdA $v \in L^1(B_1(0))$

Bew Sei $x \in B_{1-\varepsilon}(0)$

$$\partial_{x_j} (v * \varphi_\varepsilon)(x) = \partial_{x_j} \int \underbrace{v(y)}_{\in L^1(B_{1-\frac{\varepsilon}{2}}(0))} \underbrace{\varphi_\varepsilon(x-y)}_{\text{supp } \varphi \subset B_\varepsilon(x) \subset B_{1-\frac{\varepsilon}{2}}(0)} dy$$

$$= \int \underbrace{v(y)}_{\in L^1(B_{1-\frac{\varepsilon}{2}}(0))} \partial_{x_j} \varphi_\varepsilon(x-y) dy$$

$$= - \int \underbrace{v(y)}_{\in C_0^\infty(B_1(0))} \partial_{y_j} \varphi_\varepsilon(x-y) dy$$

Gleichung
(7)

$$= - \int v(y) \partial_{y_j} \varphi_\varepsilon(x-y) dy$$

auf
B₁

$$= \int v(y) \partial_{x_j} \varphi_\varepsilon(x-y) dy$$

$$= \partial_{x_j} \int v(y) \varphi_\varepsilon(x-y) dy = \partial_{x_j} (v * \varphi_\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \partial_j (v * \varphi_\varepsilon) = \partial_j (v * \varphi_\varepsilon) \quad \text{auf } B_{1-\varepsilon}(0) \quad \forall \varepsilon < \frac{\text{Geo.}}{2}$$

$\Rightarrow v * \varphi_\varepsilon$ erfüllt das notwendige Poincaré-Kriterium auf $B_{1-\varepsilon}(0)$ (klassisch!)

Analysis?

$$\Rightarrow \exists u_\varepsilon \in C^1(B_{1-\varepsilon}(0)) : Du_\varepsilon = v * \varphi_\varepsilon \quad (\text{Kor})$$

Nun Grenzübergang für $\varepsilon \rightarrow 0$!

Problem keine Kontrolle über u_ε , nur über Ableitungen

1) OBdA können wir annehmen dass

$u_\varepsilon \in A_{B_{1-\varepsilon_0}(0)}$ (siehe (A)) denn falls nicht

Betrachte $\tilde{u}_\varepsilon(x) := u_\varepsilon(x) - \int_{B_{1-\varepsilon_0}(0)} u_\varepsilon(y) dy$

Welches genauso eine Lösung von $(**)$ ist

2) Wir zeigen: $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ ist Cauchy in $W^{1,1}(B_{1-\varepsilon_0}(c))$

Bew

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}\|_{W^{1,1}(B_{1-\varepsilon_0}(c))}$$

$$= \|u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}\|_{L^1(B_{1-\varepsilon_0}(c))} + \|Du_\varepsilon - Du_{\varepsilon'}\|_{L^1(B_{1-\varepsilon_0}(c))}$$

$$= \underbrace{\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}\|_{L^1(B_{1-\varepsilon_0}(c))}}_{\text{Cauchy da } u \in L^1(B_{1-\varepsilon_0}(c))} + \underbrace{\|v \times \varphi_\varepsilon - v \times \varphi_{\varepsilon'}\|_{L^1(B_{1-\varepsilon_0}(c))}}_{\text{Cauchy da } v \in L^1(B_{1-\varepsilon_0}(c))}$$

Dadurch, dass wir
 $u_\varepsilon, u_{\varepsilon'} \in A_{B_{1-\varepsilon_0}(c)}$ annehmen
 konnten gibt es eine Poincaré
 Ungleichung

$$\leq C \|Du_\varepsilon - Du_{\varepsilon'}\|_{L^1(B_{1-\varepsilon_0}(c))} + \|v \times \varphi_\varepsilon - v \times \varphi_{\varepsilon'}\|_{L^1(B_{1-\varepsilon_0}(c))}$$

$$\leq (C+1) \|v \times \varphi_\varepsilon - v \times \varphi_{\varepsilon'}\|_{L^1(B_{1-\varepsilon_0}(c))}$$

$$\Rightarrow \forall \theta > 0 \exists \varepsilon_1 = \varepsilon_1(\theta) > 0 : (\varepsilon, \varepsilon' < \varepsilon_1 \Rightarrow \|u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}\|_{W^{1,1}(B_{1-\varepsilon_0}(c))} < \theta)$$

$$\Rightarrow (u_\varepsilon) \subset W^{1,1}(B_{1-\varepsilon_0}(c)) \text{ Cauchy}$$

$$\Rightarrow \exists u \in W^{1,1}(B_{1-\varepsilon_0}(c)) : u_\varepsilon \xrightarrow{W^{1,1}(B_{1-\varepsilon_0}(c))} u$$

Nun

$$Du = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_{1-\varepsilon_0}(0)}^{L^2(B_{1-\varepsilon_0}(0))} Du_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_{1-\varepsilon_0}(0)}^{L^2(B_{1-\varepsilon_0}(0))} (v * \varphi_\varepsilon) = v$$

$$\Rightarrow \exists u \in W^{1,1}(B_{1-\varepsilon_0}(0)) : Du = v$$

Problem Das gefundene $u = u^{(\varepsilon_0)}$ kann von ε_0 abhängen!

[In Allgemeinen wird es das auch da

$$u^{(\varepsilon_0)} \in A_{B_{1-\varepsilon_0}(0)} \quad \text{und damit gelten}$$

für verschiedene ε_0 verschiedene Bedingungen]

Lösung Wähle $\delta_n \rightarrow 0^+$ und

$$u_n(x) := \frac{1}{1-\delta_n} u((1-\delta_n)x) \quad x \in B_1(0)$$

Dann gilt $u_n \in A_{B_1(0)}$ da

$$\int_{B_1(0)} u_n(x) = \int_{B_{1-\delta_n}(0)} \frac{1}{1-\delta_n} u(y) dy = \frac{1}{1-\delta_n} \int_{B_{1-\delta_n}(0)} u(y) dy$$

$$= 0 \Rightarrow u_n \in A_{B_1(0)}$$

$$(1-\delta_n)v((1-\delta_n) \cdot) - (1-\delta_m)v((1-\delta_m) \cdot)$$

Nun gilt

$$\|u_n - u_m\|_{W^{1,1}} = \|u_n - u_m\|_{L^1(B_1(0))} + \|Du_n - Du_m\|_{L^1(B_1(0))}$$

Poincaré

$$\leq (C(B_1(0)) + 1)$$

$$\| (1-\delta_n)v((1-\delta_n) \cdot) - (1-\delta_m)v((1-\delta_m) \cdot) \|_{L^1}$$

$$= \left(C(B_1(0)) + 1 \right) \int \left| (1 - \delta_n) v((1 - \delta_n)x) - (1 - \delta_m) v((1 - \delta_m)x) \right| dx$$

$\rightarrow 0$ für $n, m \rightarrow \infty$ denn

$$v((1 - \delta_n) \cdot) \xrightarrow{L^1} v(\cdot) \quad \forall v \in L^1(\mathbb{R}^d)$$

(Beweis hierzu: Betrachte erst $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ und benutze dann Dichte)

$$\Rightarrow (u_n) \subset W^{1,1}(B_1(0)) \quad \text{Cauchy}$$

$$\Rightarrow u_n \xrightarrow{W^{1,1}} \bar{u} \quad \text{für ein } \bar{u} \in W^{1,1}(B_1(0))$$

$$\Rightarrow \bar{u} \in L^1(B_1(0)) \quad \text{und}$$

$$D\bar{u} = \lim_{n \rightarrow \infty} D u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \delta_n) v((1 - \delta_n) \cdot) = v$$

$\Rightarrow$ Claim

Aufgabe 11

Theorem 5(i) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ glatt, beschränkt, konvex, $u \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$
 sodass $Du(x) = \begin{pmatrix} Du^1(x) \\ \vdots \\ Du^m(x) \end{pmatrix} \in \{A, B\}$ für fast alle $x \in \Omega$.

Falls $\text{rk}(A-B) \geq 2$ so gilt $Du(x) = A$ für oder

$Du(x) = B$ für

Beweis OBdA (!) $A=0$, $B = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & | & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$ $\text{rk}(B) = \text{rk}(B-A) \geq 2$

Warum OBdA?

$A=0$ ist OBdA, denn falls $Du(x) \in \{A, B\}$ für so
 gilt $Dv(x) \in \{0, \underbrace{B-A}_{=: \tilde{B}}\}$ für $v(x) := u(x) - Ax$
 OBdA ist $\tilde{B}$ in normalisierter Zeilenstufenform d.h.

$$\tilde{B} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \dots & 0 & (*) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{array} \right) \quad * \text{ beliebige Matrix}$$

denn seien $S_1, \dots, S_k$ Elementarmatrizen sodass

$$S_1 \dots S_k \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & (*) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \left[\begin{array}{l} S_1, \dots, S_k \text{ existieren da } \tilde{B} \text{ durch} \\ \text{Zeilenoperationen in normalisierte} \\ \text{Zeilenstufenform überführt} \\ \text{werden kann} \end{array} \right]$$

Nun setze $w(x) := S_1 \dots S_k v(x)$. Dann $Dw(x) = S_1 \dots S_k Du(x)$

$$Dw(x) \in \left\{ 0, \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & | & (*) \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ für.}$$

Nun kann man noch Spaltenoperationen durchführen
 sodass (d.h. mit Elementarmatrizen von rechts multiplizieren)

$$\text{sodass } \underbrace{\tilde{B}(S_1 \dots S_k)}_{=: \tilde{S}} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & | & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Setze $\tilde{\Omega} = \tilde{S}(\Omega) := \{\tilde{S}x \mid x \in \Omega\}$ und definiere

$$\tilde{w} \in W^{1,\infty}(\tilde{\Omega}) \text{ durch } \tilde{w}(x) := w(\tilde{S}x)$$

Dann gilt $D\tilde{w}(x) = Dw(\tilde{S}x) \cdot \tilde{S} \in \left\{ 0, \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & | & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \right\}$ für

Nun folgt mit dem gegebenen Beweis

$$D\tilde{w} = 0 \quad \text{f.} \tilde{u},$$

oder

$$D\tilde{w} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \quad \text{f.} \tilde{u}.$$

$$\Rightarrow D\tilde{w}(\tilde{S}x) \tilde{S} = 0 \quad \text{f.} \tilde{u}$$

oder

$$D\tilde{w}(\tilde{S}x) \cdot \tilde{S} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \quad \text{f.} \tilde{u}$$

$$\Rightarrow D\tilde{w} = 0 \quad \text{f.} \tilde{u}$$

oder

$$D\tilde{w} = \tilde{\tilde{B}} \quad \text{f.} \tilde{u}$$

$$\Rightarrow Dv = 0 \quad \text{f.} \tilde{u}$$

oder

$$Dv = (s_1 \dots s_k)^T \tilde{\tilde{B}} = \tilde{\tilde{B}}$$

$$\Rightarrow Du = A \quad \text{f.} \tilde{u}$$

oder

$$Dv = B \quad \text{f.} \tilde{u}$$

Nun setze $\chi_E(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } Du(x) = B \\ 0 & \text{falls } Du(x) = A \end{cases}$

Wir zeigen $\chi_E \equiv \text{const.}$

Beachte, $Du^1 \stackrel{(*)}{=} \chi_E e_1$, $Du^2 \stackrel{(-0)}{=} \chi_E e_2$

Nun sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $\partial = \{2, \dots, n\}$

$$\int_{\Omega} \chi_E(x) \partial_j \varphi(x) dx = \int \partial_1 u^1(x) \underbrace{\partial_j \varphi(x)}_{\in C_0^\infty(\Omega)} dx$$

$$= - \int u^1(x) \partial_1 (\partial_j \varphi(x))$$

$$= - \int u^1(x) \partial_j (\partial_1 \varphi(x))$$

$$= \int \underbrace{\partial_2 u^1(x)}_{=0 \text{ da } j \neq 1} \partial_1 \varphi(x) = 0$$

$\neq$

Zusätzlich

$$\int_{\Omega} \chi_E(x) \partial_1 \varphi(x) = \int \partial_2 u^2(x) \partial_1 \varphi(x)$$

$$= - \int u^2(x) \partial_1 \partial_2 \varphi(x)$$

$$= \int \underbrace{\partial_1^2 u^2(x)}_{=0}$$

$\neq$
wegen $(\ddot{\alpha})$

$$\Rightarrow \int \chi_E \partial_j \varphi = 0 \quad \forall j=1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \chi_E \partial_j \varphi \, dx = - \int_{\Omega} 0 \cdot \varphi \, dx \quad \forall j \in \{1, \dots, d\}$$

$\Rightarrow \chi_E$ ist schwach diffbar mit schwacher

Ableitung 0 $\Rightarrow \chi_E \equiv \text{const.}$

Def von χ_E
 $\Rightarrow Du = A$ für oder $Du \in B$ für

Theorem 5 (ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ glatt, beschränkt & konvex, $u \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$

so, dass $Du(x) \in \{A, B\}$ für x in Ω .

Falls $\text{rk}(B-A) \leq 1$ so gibt es $n \in \mathbb{R}^d, a \in \mathbb{R}^m$,

$|n|=1$ derart dass

$$u(x) = Ax + ah(x \cdot n) + C \quad \text{für } x \text{ in } \Omega,$$

wobei $h \in [0, 1]$ für $\bar{\Omega}$.

Beweis O.B.d.A. $A=0, B = \begin{pmatrix} \overset{r \times r = 1}{1} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d.h. $a = e_1, n = e_1$.

Setze wiederum

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} Du(x) = B \\ Du(x) = A. \end{matrix} \quad \text{Nun } Du^1 = \chi_E e_1$$

und zeige wie in (i):

$\forall j \in \{2, \dots, d\}$ und $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\int \chi_E \partial_j \varphi \, dx = 0$$

Wir haben dann gefolgert:

χ_E hängt nur von x_1 ab. d.h.

$\chi_E = \text{const}$ für auf $\Omega \cap [x_1 = \frac{e}{2}]$ für fast
alle $e \in \mathbb{R}$.

$$x' = (x_2, \dots, x_d) \in \Omega'$$

Satz Es sei $\Omega = \Omega_1 \times \Omega'$ $\Omega_1 \subset \mathbb{R}, \Omega' \subset \mathbb{R}^{d-1}$

~~so dass~~ und $f \in L^1(\Omega)$ so, dass

$$\forall j \in \{2, \dots, d\} \quad \int f(x) \partial_j \varphi(x) \, dx = 0.$$

Dann gilt $f(x_1, x') = f(x_1, x'')$ für

fast alle $x'_1, x'' \in \Omega'$ für fast alle $x_1 \in \Omega_1$

(B) Reihenfolge der "fast alle" wichtig!!

Beweis des Satzes

Wähle $\psi \in C_c^\infty(\Omega_2)$ und definiere für

$$A_\psi(x') = \int_{\Omega_2} f(x', x_2) \psi(x_2) dx_2 \quad x' \in \Omega'$$

Nun gilt für $\eta \in C_c^\infty(\Omega')$ und $j \in \{2, \dots, d\}$

$$\int_{\Omega'} A_\psi(x') \partial_j \eta(x') dx'$$

$$= \int_{\Omega'} \left(\int_{\Omega_2} f(x', x_2) \psi(x_2) dx_2 \right) \partial_j \eta(x') dx'$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\Omega} f(x', x_2) \psi(x_2) \partial_j \eta(x') dx$$

$$= \int_{\Omega} f(x) \partial_j (\psi \eta) dx \stackrel{\text{Verr.}}{=} \equiv 0.$$

$\Rightarrow A_\psi$ ist in Ω' schwach diffbar und

$$DA_\psi = 0 \Rightarrow A_\psi \equiv \text{const für } \psi.$$

$\Rightarrow \exists N_\psi \subset \Omega' : \chi(N_\psi) = 0$ und

$$A_\psi(x') = \text{const auf } \Omega \setminus N_\psi$$

~~$x' \in N_\psi$~~ $x', x'' \notin N_\psi$

$$\Rightarrow A_\psi(x') = A_\psi(x'')$$

~~ist~~

$$\Rightarrow \int_{\Omega_2} (f(x', x_2) - f(x'', x_2)) \psi(x_2) dx_2 = 0$$

$\forall x', x'' \notin N_\psi$

$$= \{f \in C(\Omega_1) \mid f|_{\partial\Omega_1} = 0\}$$

* Beachte $C_0(\Omega_1)$ ist separabel und

$$\overline{C_c^\infty(\Omega_1)}^{\|\cdot\|_{C_0(\Omega_1)}} = C_0(\Omega_1)$$

$\Rightarrow \exists \{\psi_n\}_{n=1}^\infty \subset C_c^\infty(\Omega_1)$ d.h., dass

$$\overline{\{\psi_n\}_{n=1}^\infty}^{\|\cdot\|_{C_0(\Omega_1)}} = C_0(\Omega_1)$$

Setze $N_n := N_{\psi_n}$ und $N := \bigcup_{n=1}^\infty N_n$ Nun $\lambda(N) = 0$

und

$$\int_{\Omega_1} (f(x', x_2) - f(x'', x_2)) \psi_n(x_2) dx_2 = 0 \quad \forall x', x'' \notin N$$

Dichtheit $\Rightarrow \int_{\Omega_1} (f(x', x_2) - f(x'', x_2)) \psi(x_2) dx_2 = 0$

$$\forall \psi \in C_0(\Omega_1) \quad \forall x', x'' \notin N$$

HL der

$\Rightarrow$
Variationsrechnung

$$\exists N_1 : f(x', x_2) - f(x'', x_2) = 0$$

$$\forall x', x'' \notin N \quad \forall x_2 \notin N_1$$