Prof. Dr. Friedmar Schulz
Dr. Kim-Hang Le
SS 2018
Gesamt: 10+1* Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis I – Blatt 10

Abgabe und Besprechung: 8:00-10:00, 06.07.2018, N24 - H14

0. *Bitte geben Sie nur die Übungsaufgaben* **1b-c-d*, 2, 3, 4** ab.

1. (a) Folgere aus den Additionstheoreme für Cosinus und Sinus, dass $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

   (b) Beweisen Sie unter Verwendung von Aufgabe 1a und dem Zwischenwertsatz, dass die Funktion $f(x) = 3x^2 - \cos x$ eine Nullstelle auf dem Intervall $[0,1]$ hat. [1.5]

   (c) Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und die Funktion $f : [a,b] \to [a,b]$ sei stetig. Zeigen sie mit Hilfe der Zwischenwertsatz, dass f mindestens einen Fixpunkt hat, d.h. es existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = x_0$. [1.5]

   (d) Geben Sie ein Beispiel für ein offenes Intervall (a,b) und eine stetige Funktion $f : (a,b) \to (a,b)$ an, so dass f keinen Fixpunkt hat. [1*]

2. (a) Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ dehnungsbeschränkt. Zeige, dass f auf D gleichmäßig stetig ist. [0.5]

   (b) Zeige, dass $f(x) := \dfrac{1}{x}$ auf $[1,\infty)$ gleichmäßig stetig ist und $g(x) := x^2$ auf $[0,\infty)$ nicht gleichmäßig stetig ist. [2]

3. Sei $D \subset \mathbb{R}$ und seien $f_k : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, die auf D gleichmäßig stetig sind. [1.5]
   Beweise folgende Aussage aus der Vorlesung: Konvergiert die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf D gegen $f : D \to \mathbb{R}$, so ist f gleichmäßig stetig auf D.

4. (a) Untersuche die Reihe $f(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^k}{k^2}$ auf Konvergenz und entscheide, für welche $x \in \mathbb{R}$ sie eine stetige Funktion darstellt. [1.5]

   (b) Zeige, dass die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{kx^2}{k^3 + x^3}$ für jedes $c > 0$ auf dem Intervall $[0,c]$ gleichmäßig konvergiert. Konvergiert die Reihe gleichmäßig auf $[0,\infty)$? [1.5]

5. Gegeben sei die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_k : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \frac{x}{kx+1}.$$

   Zeige, dass alle f_k streng monoton wachsend sind und dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf $[0,\infty)$ gleichmäßig gegen $f \equiv 0$ konvergiert.