Prof. Dr. Friedmar Schulz
Dr. Kim-Hang Le
SS 2018
Gesamt: 10+1* Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis I – Blatt 11

Abgabe und Besprechung: 8:00-10:00, 13.07.2018, N24 - H14

0. *Bitte geben Sie nur die Übungsaufgaben* **2, 3, 4, 5a, 6** ab.

1. Für ein $p \in \mathbb{N}$ sei die Funktion f auf $\mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^p \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Untersuche, für welche Werte von p die Funktion f stetig, differenzierbar bzw. stetig differenzierbar ist.

2. Man stelle fest, welche der folgenden Funktionen eine Umkehrfunktion besitzen und bestimme diese ggfs. Falls möglich, bestimme man die Ableitung der Umkehrfunktion sowohl direkt, als auch mit Hilfe der Umkehrformel:

   (a) $g(x) = x^2 \cos x$ für $x \in \mathbb{R}$, [1]

   (b) $h(x) = \sqrt{x^4 - x^2}$ für $x \in [1, +\infty)$. [1]

3. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) := \left|x^2 - 1\right|$.

   (a) Untersuchen Sie f auf Differenzierbarkeit. [1.5]

   (b) Bestimmen Sie die Koordinaten der lokalen Extremstellen von f. [1.5]

4. Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die folgenden Behauptungen:

   (a) $e^x \geq 1 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. [1]

   (b) Wenn die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar ist und $|f'(x)| \leq M$ für alle $x \in (a, b)$ mit $M > 0$, dann ist f Lipschitz-stetig. [1*]

5. Seien $f, g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen in $\mathbb{R}_0^+$ mit $f(0) = g(0)$ und $f'(x) \geq g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$. Zeige:

   (a) Es gilt $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$. [1]

   (b) Gilt zusätzlich $f'(0) > g'(0)$, so ist $f(x) > g(x)$ für alle $x > 0$.

6. Berechne nach de L'Hospital: [3x1]

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x \log x}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x - \log(1+x)}$.