ulm university universität uulm

Prof. Dr. Friedmar Schulz
Dr. Kim-Hang Le
SS 2018
Gesamt: 10 Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis I – Blatt 3

(Abgabe und Besprechung: 8:00-10:00, 11.05.2018, N24 - H14)

0. *Bitte geben Sie nur die Übungsaufgaben 2, 3, 4 ab.*

1. Man beweise die Formeln

   (a) $\binom{p+k}{p} + \binom{p+k}{p+1} = \binom{p+k+1}{p+1}$,

   (b) $\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + ... + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$, für $0 \le p \le n$.

2. Sei X eine endliche Menge mit n Elementen. Es bezeichne $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X, die ist die Menge aller Teilmengen von X, d.h., $\mathcal{P}(X) := \{A \mid A \subset X\}$. Beweise durch vollständige Induktion über n, dass $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$ gilt. Dann schließen Sie, dass $|\mathcal{P}(X)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. [3]

   Hinweis: Für den Induktionsschritt wähle man ein $x \in X$ und zerlege $\mathcal{P}(X)$ in die Mengen

   $$P_1 := \{A \mid A \subset X, x \in A\}, \quad P_2 := \{B \mid B \subset X, x \notin B\}.$$

3. (a) Beweisen Sie mit Hilfe der binomischen Formel: Für jede reelle Zahl $x \ge 0$ und für jede natürliche Zahl $n \ge 2$ gilt: [2]

   $$(1+x)^n \ge \frac{n^2}{4}x^2.$$

   (b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a): es existiert zu jeder reellen Zahl $a > 1$ eine natürliche Zahl n_0, sodass $a^n > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge n_0$ gilt. [2]

4. Betrachte zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der reellen Zahlen definiert durch

   $$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

   Zeige, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, d.h., $a_n \le a_{n+1}$ und $b_n \ge b_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. *Hinweis*: Verwende die Bernoullische Ungleichung. [3]