Prof. Dr. Friedmar Schulz
Dr. Kim-Hang Le
SS 2018
Gesamt: 10 Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis I – Blatt 4

Abgabe und Besprechung: 8:00-10:00, 18.05.2018, N24 - H14
Bitte geben Sie nur die Übungsaufgaben 1, 2a-b, 4 ab.

Sei $\mathbb{K}$ ein Archimedisch angeordneter Körper.

1. Zeige anhand der Definition, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \dfrac{3n-1}{n+2}$ gegen $a \in \mathbb{K}$ konvergiert. Und dann bestimme zu $\varepsilon = 10^{-5}$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$. [2]

2. Untersuche die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimme die Grenzwerte $a, b, c \in \mathbb{K}$, falls sie existieren. [1.5+1.5]

   (a) $c_n := \dfrac{(-1)^n n^2 + 1}{n^2 + 3n + 2}$,

   (b) $b_n := \dfrac{n^2}{2} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \dfrac{k}{n^2+3}$,

   (c) $c_n := \dfrac{n}{2^n}$.

   Hinweis: Beweise, dass $n^2 \leq 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

3. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei folgen in $\mathbb{K}$. Wir nehmen an, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so gibt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 0$ gelten:
$$|a_n| < 3\varepsilon^2, \qquad |b_n + b_{n+1}| < \varepsilon.$$
Sind diese Folgen konvergent? Wenn ja, bitte beweisen Sie die Behauptung. Wenn nein, bitte geben Sie ein Gegenbeispiel!

4. Sei $q \in \mathbb{K}$ mit $0 \leq q < 1$.

   (a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch $a_n := 1 + q + ... + q^n$. Zeige, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge ist und bestimme ihren Grenzwert. [2]

   (b) Angenommen, $\mathbb{K}$ ist vollständig. Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und gilt:
$$(*) \qquad |b_{n+1} - b_n| \leq q.\, |b_n - b_{n-1}| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$
   Zeige, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent ist. [2]
   Hinweis: Nach $(*)$ beweisen Sie, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge ist.

   (c) Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auch konvergent, wenn $q = 1$ gilt? [1]

5. (Quadratwurzelalgorithmus) Durch vollständige Induktion über n zeige man:

   (a) Es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rationaler Zahlen der Form
$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k}$$
   mit $d_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, so dass
$${x_n}^2 \leq 2 < \left(x_n + \frac{1}{10^n}\right)^2.$$
   Hinweis: Wähle im Induktionsschluss $d_{n+1} = \max\left\{k \in \{0,1,\ldots,9\} \middle| \left(x_n + \frac{k}{10^{n+1}}\right)^2 \leq 2\right\}$.

   (b) Ist $N \in \mathbb{N}$, so für alle $n \geq N$ gilt: $x_N \leq x_n < x_n + \frac{1}{10^n} \leq x_N + \frac{1}{10^N}$.