Prof. Dr. Friedmar Schulz
Dr. Kim-Hang Le
SS 2018
Gesamt: 10 Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis I – Blatt 5

Abgabe und Besprechung: 8:00-10:00, 25.05.2018, N24 - H14

0. *Bitte geben Sie nur die Übungsaufgaben **1, 2, 3, 4a** ab.*

1. Sei $0 < a \in \mathbb{R}$. Man untersuche die Folge $(\sqrt[n]{a})_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie. Dann vergleiche man $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a}$ und folgere damit $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. [2]

2. Untersuche die folgenden reellen Folgen auf Konvergenz und bestimme die Grenzwerte, falls sie existieren. [1.5x2]
   (a) $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n}$, (b) $b_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$, mit Hilfe der 1. Aufgabe.

3. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge, die rekursiv durch
$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2}{4} + 1,\ n \in \mathbb{N}.$$
definiert ist.
   (a) Zeige, dass $0 \leq x_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. [1.5]
   (b) Zeige, dass $(x_n)_n$ monoton wachsend ist. Dann folgere aus dem Monotonieprinzip, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme den Grenzwert. [2]

4. (a) Sei $A = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n \ \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Bestimme $\sup A$ und $\inf A$. [1.5]
   (b) Sei B eine nicht-leere beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Zeige, dass
$$\sup\{|x-y|,\ (x,y) \in B^2\} = \sup B - \inf B.$$

5. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die durch die Rekursion
$$f_{n+1} := f_n + f_{n-1} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N},\ f_0 := 0,\ f_1 := 1$$
definierte Folge der Fibonacci-Zahlen und sei $g = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   (a) Zeige mit Hilfe des Einschließungskriteriums, dass
$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \to g \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$
   Hinweis: Zeige zunächst durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\left| \frac{f_{n+1}}{f_n} - g \right| = \frac{1}{f_n} \cdot \frac{1}{g^n}.$$
   (b) Zeige durch vollständige Induktion (zweite Version), dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$