

Übungen zur Vorlesung Analysis I – Blatt 6

Abgabe und Besprechung: 8:00-10:00, 01.06.2018, N24 - H14

0. Bitte geben Sie nur die Übungsaufgaben 1, 2 ab.

1. Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$a_n := (-1)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zeige, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist. [2]

(b) Bestimme $\inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. [2]

(c) Sei H die Menge der Häufungswerte von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Zeige, dass $\{-1, 1\} \subset H$ ist. [2]

(d) Zeige, dass $H \subset \{-1, 1\}$ und dann bestimme $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$. [2]

Hinweis: Zu zeigen ist: $a \notin \{-1, 1\} \Rightarrow a \notin H$,

d.h., für $a \notin \{-1, 1\}$ bestimme $d = d(a) > 0$ und $N(a) \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| \geq d$ für $n \geq N$.

2. Folgere aus dem Monotonieprinzip, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ konvergent ist. [2]

3. (a) Sei $(a_n)_n$ eine Folge der positiven reellen Zahlen. Zeige, dass wenn die Folge $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_n$ gegen l konvergiert, dann konvergiert die Folge $(\sqrt[n]{a_n})_n$ auch und gegen denselben Grenzwert l .

Hinweis: Beachtet, dass $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \dots \frac{a_{N+1}}{a_N} a_N$ für $n, N \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

(b) Man berechne mit Verwendung von (a) der Grenzwert der Folge $(a_n)_n$ definiert durch:

$$(i) \quad a_n = \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}, \quad (ii) \quad a_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

(c) Zeige, dass die umgekehrte Implikation von (a) falsch ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Folge $(a_n)_n$ definiert durch

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad a_{2k} = x^k y^k \quad \text{und} \quad a_{2k+1} = x^{k+1} y^k,$$

wobei $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$.

BEMERKUNG:

1. Die Zwischenklausur findet am Samstag, 16.06. von 9:15 bis 11:15 Uhr in den Hörsälen 3 und 22 statt.

2. Die Note in der Zwischenklausur ist irrelevant für die Modulnote. Sie wird als Note eines Übungsblattes gesammelt.