ulm university universität uulm

Prof. Dr. Friedmar Schulz
Dr. Kim-Hang Le
SS 2018
Gesamt: 10 Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis I – Blatt 7

Abgabe und Besprechung: 8:00-10:00, 08.06.2018, N24 - H14

0. *Bitte geben Sie nur die Übungsaufgaben* **1, 2, 3a** ab.

1. Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz [1.5x3]

   (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{\left(\sqrt{2}\right)^k}$.

2. (a) (*Leibnizsches Konvergenzkriterium*) Zeige: wenn $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_k \downarrow 0$ ist, dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$. [1.5]

   (b) Sie untersuchen die folgenden Reihen auf absolute und bedingte Konvergenz durch das Leibnizsches Konvergenzkriterium [1.5x2]

   (i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$, (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k+1}{3^k-4}$.

3. Sie beweisen mit Hilfe der Folgenden Methoden, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

   (a) Mit Hilfe der Definition. [1]

   Hinweis: Betrachte die Partialsummen $s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}$ und zeige, dass $s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

   (b) Mit Hilfe von dem Cauchyschen Konvergenzkriterium und dem verallgemeinerten Monotonieprinzip.

   Hinweis: Beweise, dass $s_m - s_n = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} > \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $m = 2n+1$. Damit erfüllt $(s_n)_n$ das Cauchy-Kriterium nicht und ist folglich divergent in $\mathbb{R}$. Danach verwenden Sie das verallgemeinerte Monotonieprinzip.

4. Beweise mit Hilfe des Cauchyschen Konvergenzkriteriums die Konvergenz der **Zeta-Reihe**

$$\zeta(\mu) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\mu}$$

   für alle $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 1$ durch Betrachtung von Abschnitten der Form $\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k^\mu}$.

BEMERKUNG:

1. Die Zwischenklausur findet am Samstag, 16.06. von 9:15 bis 11:15 Uhr in den Hörsälen 3 und 22 statt.
2. *Inhalt der Zwischenklausur ist der Vorlesungs- und Übungsstoff inklusive der Vorlesung vom 07.06. bzw. Übungsblatt 8.*