Prof. Dr. Friedmar Schulz
Dr. Kim-Hang Le
SS 2018
Gesamt: 10 Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis I – Blatt 9

Abgabe und Besprechung: 8:00-10:00, 29.06.2018, N24 - H14

0. *Bitte geben Sie nur die Übungsaufgaben* **2, 3, 4, 5a*** ab.

1. Unter Benutzung der Reihendarstellungen der Exponentialfunktion und von Cosinus und Sinus zeige man:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1.$

2. Bestimmen Sie die Grenzwerte. [3x1.5]

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x^2+5x+3}{x^3+x^2+x+1}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x}$. *Hinweis:* Verwenden Sie Aufgabe 1.

3. (a) Folgere aus ihrer Funktionalgleichung, dass die Exponentialfunktion [1.5]

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

   monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ ist.
   Hinweis: Folgere zunächst aus der Funktionalgleichung, dass $\exp x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und aus der Reihendarstellung, dass $\exp x \geq 1 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Sei $c > 0$. Man zeige, dass die Exponentialfunktion auf dem Intervall $[-c, c]$ dehnungsbeschränkt ist und bestimme eine Lipschitz-Konstante. Gibt es ein $c > 0$, sodass sie kontrahierend auf $[-c, c]$ ist? [1.5]

4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{für } x > 1, \\ ax^2 + b & \text{für } x \in [0,1], \\ 2 + \sqrt{1-x} & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

   Bestimme a und b so, dass f auf $\mathbb{R}$ stetig ist. [2.5]

5. (a) Zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq \sqrt{2} \\ 1 & \text{für } x > \sqrt{2} \end{cases}$$

   stetig ist. [1]

   (b) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Zeige, dass dann $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.