Zwischenklausur Analysis I

Datum:	16.06.2018	Bearbeitungszeit:	120 Minuten
Uhrzeit:	09:15 Uhr	Prüfer:	Prof. Dr. Friedmar Schulz

Vom teilnehmer auszufüllen:

Name:	__________	Vorname:	__________	Matrikelnummer
Studiengang:	__________	Abschluss:	__________	__________

Zwischenklausur Analysis I – Auswertung

Aufgabe	**Ist**	**Soll**	**Aufgabe**	**Ist**	**Soll**
1		10	3a		10
2a		6	3b		6
2b		6	3c		9
2c		6	4a		7
2d		6	4b		18
2e		6	5		10

Summe:

Prof. Dr. F. Schulz
Kim-Hang Le
SS 2018

Punktzahl: 100

Zwischenklausur Analysis I

Alle Aussagen sind zu begründen!

1. Seien X und Y nicht-leere Mengen und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie: f ist genau dann injektiv, wenn für alle Teilmengen $A,\ B \subset X$ gilt $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$. [10]

2. Beweisen oder widerlegen Sie: [5x6]

   (a) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein reelle Folge derart, dass
   $$\forall \varepsilon \in \left(0, \tfrac{1}{2}\right)\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$
   Dann ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

   (b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein reelle Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

   (c) Ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe, dann konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{2k}$.

   (d) Sei $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $a_n = \begin{cases} 3^n & n \text{ gerade} \\ 3^{-n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$. Dann besitzt die Menge A ein Infimum und kein Supremum in $\mathbb{R}$.

   (e) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. Falls $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

3. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, die rekursiv durch
   $$a_1 = 4 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{2a_n^2 - 3}{a_n + 2}$$
   definiert ist.

   (a) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n > 3$. [10]

   (b) Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabe 3a: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_{n+1} - 3 > \dfrac{3}{2}(a_n - 3)$. [6]

   (c) Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabe 3b: $a_n \geq \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1} + 3 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ damit konvergent? [9]

4. (a) Berechnen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k+1}{2k^2 - 1} x^k$. [7]

   (b) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, in denen die obige Potenzreihe konvergiert. [18]

5. (a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Zeige, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit [5]
   $$\frac{2}{3}|a_k| \leq \left|\frac{a_k}{1 + a_k}\right| \leq 2|a_k| \ \text{ für alle } k \geq N.$$

   (b) Zeige, dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann absolut konvergiert, wenn $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k}{1 + a_k}$ absolut konvergiert. [5]