ulm university universität uulm

Prof. Dr. F. Schulz
Kim-Hang Le
SS 2018

Punktzahl: 100

Lösungsvorschlag – Zwischenklausur Analysis I

1. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie: f ist genau dann injektiv, wenn für alle Teilmengen $A,\ B \subset X$ gilt $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$. [10]

Lösung:

" $\Rightarrow$ " : Angenommen, f ist injektiv. Z.z.: $\forall A,\ B \subset X$ gilt $\begin{cases} (*) & f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B) \\ (**) & f(A) \cap f(B) \supset f(A \cap B). \end{cases}$

Seien $A,\ B \subset X$ und $y \in f(A) \cap f(B)$. Dann existiert ein $x_1 \in A : y = f(x_1)$ und es existiert ein $x_2 \in B : y = f(x_2)$. Wegen der Injektivität von f ist $x_1 = x_2 \in A \cap B$, also $y = f(x_1) = f(x_2) \in f(A \cap B)$. Daraus folgt die Inklusion $(*)$.

Seien $A, B \subset X$ und $y \in f(A \cap B)$. Dann existiert ein $x \in A \cap B : y = f(x)$. Weil $A \cap B$ Teilmenge von A und auch von B ist, also ist $y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$. Damit folgt $(**)$.

" $\Leftarrow$ ": Angenommen umgekehrt, $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$ gilt für alle Teilmengen $A,\ B \subset X$. Z.z.: f ist injektiv. Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Setze $y := f(x_1) = f(x_2)$. Dann ist $y \in f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) \neq \emptyset$. Damit folgt $\{x_1\} \cap \{x_2\} \neq \emptyset$, d.h. $x_1 = x_2$. Also ist f injektiv.

2. Beweisen oder widerlegen Sie: [5x5]

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein reelle Folge derart, dass

$$\forall \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Dann ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein reelle Folge mit $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(c) Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$.

(d) Sei $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $a_n = \begin{cases} 3^n & n \text{ gerade} \\ 3^{-n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$. Dann besitzt die Menge A ein Infimum und kein Supremum in $\mathbb{R}$.

(e) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. Falls $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Lösung:

(a) Die Aussage ist wahr.
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
Falls $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, gilt nach der Voraussetzung: $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad |a_n - a| < \varepsilon$.

Falls $\varepsilon \geq \frac{1}{2}$, betrachten wir $\varepsilon' = \frac{1}{4} \in \left(0, \frac{1}{2}\right) < \varepsilon$. Zu diesem ε' existiert nach der Voraussetzung ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon' \; \forall n \geq N$. Also gilt: $|a_n - a| < \varepsilon \; \forall n \geq N$.
Fazit: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad |a_n - a| < \varepsilon$, d.h. die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(b) Die Aussage ist wahr, denn: für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 \leq |a_n| \leq |na_n|$ und $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$, folgt daraus mit dem Einschließungskriterium $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. Methode: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}.(na_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \, . \lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0.0 = 0.$

(c) Die Aussage ist falsch.
Gegenbeispiel: Sei $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ nach dem Leibniz-Kriterium, aber $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{2k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ ist divergent, da die harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert.

(d) Die Aussage ist wahr.
Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n > 0$. Dann ist die Menge A nicht leer und nach unten beschränkt. Damit besitzt A ein Infimum.
Außerdem gilt $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n = +\infty$, d.h.: $\forall c > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : (\forall n \geq N \quad 3^n > c)$. Damit ist A nicht nach oben beschränkt. Folglich existiert das Supremum von A nicht.

(e) Die Aussage ist falsch.
Gegenbeispiel: Seien $a_k = \frac{1}{k^2}$ und $b_k = \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim\limits_{k\to\infty} (a_k - b_k) = 0$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert nach Vorlesung, aber die harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert.

3. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, die rekursiv durch

$$a_1 = 4 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{2a_n^2 - 3}{a_n + 2}$$

definiert ist.

(a) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n > 3$. [10]

(b) Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabe 3a: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(a_n - 3)$. [10]

(c) Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabe 3b: $a_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + 3 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ damit konvergent? [10]

Lösung:

(a) (IA) Klar ist, dass die Aussage für $n = 1$ wahr ist.
(IS) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei die Aussage für dieses n richtig, d.h. $a_n > 3$ (IV).
Z.z.: $a_{n+1} > 3$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt $a_n + 2 > 0$ und $2a_n - 3 > 3$. Also gilt:

$$a_{n+1} > 3 \Leftrightarrow \frac{2a_n^2 - 3}{a_n + 2} > 3 \Leftrightarrow 2a_n^2 - 3 > 3(a_n + 2) \Leftrightarrow a_n(2a_n - 3) > 9\text{: wahr}$$

Folglich ist die Aussage für dieses n+1 richtig. Die Aussage (i) ist also daher richtig nach dem Induktionsprinzip.

(b) Aus dem Ergebnis der Aufgabe 3a folgt:

$$a_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(a_n - 3) = \frac{2a_n^2 - 3}{a_n + 2} - 3 - \frac{3}{2}(a_n - 3) = \frac{a_n^2 - 3a_n}{2(a_n + 2)} = \frac{a_n(a_n - 3)}{2(a_n + 2)} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N},$$

(c) (IA) Wegen $a_1 = 4 = \left(\frac{3}{2}\right)^{1-1} + 3$ ist die Aussage für $n = 1$ wahr ist.

(IS) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei die Aussage für dieses n richtig, d.h. $a_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + 3$.

Z.z.: $a_{n+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n} + 3$. Aus der Induktionsannahme und der Aufgabe 3b folgt , dann gilt:

$$a_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(a_n - 3) > \frac{3}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + 3 - 3\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n}.$$

Nach dem Induktionsprinzip ist die Aussage daher richtig.

Die Folge $(a_n)_n$ divergiert wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = +\infty$ und der obigen Ungleichung.

4. (a) Berechnen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2k^2-1} x^k$. [10]

(b) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, in denen die obige Potenzreihe konvergiert. [15]

Lösung:

(a) Für $a_k = \frac{k+1}{2k^2-1}$ gilt:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k\ +2}{2(k+1)^2 - 1} \cdot \frac{2k^2-1}{k+1} = \frac{2k^3 + 4k^2 - k - 2}{2k^3 + 6k^2 + 5k + 1} = \frac{2 + \frac{4}{k} - \frac{1}{k^2} - \frac{2}{k^3}}{2 + \frac{6}{k} + \frac{5}{k^2} + \frac{1}{k^3}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{2} = 1.$$

Damit hat die Potenzreihe den Konvergenzradius $R = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|} = 1.$

(b) Aus der Aufgage 4b folgt, dass diese Potenzreihe konvergiert für $|x| < 1$, d.h. $-1 < x < 1$, und divergiert für $|x| > 1$, d.h. $x < -1$ oder $x > 1$. Wir müssen jetzt noch die Ränder des Konvergenzintervalls, d.h. $x = -1$ und $x = 1$, untersuchen. Dies liefert die zwei folgenden Reihen

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{2k^2-1} \qquad \text{und} \qquad (**) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2k^2-1}.$$

Die Konvergenz der Reihe $(*)$ folgt aus dem Leibnizkriterium, weil

(i) $a_k = \frac{k+1}{2k^2-1} = \frac{\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}}{2 - \frac{1}{k^2}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{0}{2} = 0$ und

(ii) $(a_k)_k$ monoton fallend ist, denn für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $a_k > 0$ und

$$\begin{aligned} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{2k^3 + 4k^2 - k - 2}{2k^3 + 6k^2 + 5k + 1} \leq 1 \Leftrightarrow 2k^3 + 6k^2 + 5k + 1 \geq 2k^3 + 4k^2 - k - 2 \\ &\Leftrightarrow \ 2k^2 + 6k + 3 \geq 0\text{: wahr} \end{aligned}$$

Die Divergenz der Reihe $(**)$ folgt dagegen aus dem Minorantenkriterium wegen der Divergenz der harmonischen Reihe und

$$a_k = \frac{k+1}{2k^2-1} \geq \frac{k}{2k^2} = \frac{1}{2k} \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Insgesamt: Die ursprüngliche Potenzreihe konvergiert genau für $x \in [-1, 1)$.

5. (a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Zeige, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit [5]

$$\frac{2}{3}|a_k| \leq \left|\frac{a_k}{1+a_k}\right| \leq 2|a_k| \text{ für alle } k \geq N.$$

(b) Zeige, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann absolut konvergiert, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ absolut konvergiert. [5]

Losüng:

(a) Die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ impliziert: $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Daraus folgt dann $\lim_{k\to\infty} |1+a_k| = 1$. Deswegen gibt es zu dem $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k \geq N$ gilt:

$$\begin{aligned} ||1+a_k|-1| &< \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < |1+a_k| - 1 < \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{1}{2} < |1+a_k| < \frac{3}{2} \\ &\Longleftrightarrow \frac{2}{3} < \frac{1}{|1+a_k|} < 2. \end{aligned}$$

Damit folgt die Ungleichungskette:

$$\frac{2}{3}|a_k| \leq \left|\frac{a_k}{1+a_k}\right| \leq 2|a_k| \text{ für alle } k \geq N.$$

(b) Angenommen, die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert. Also gilt $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Damit gibt es nach Aufgabe 5a ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{2}{3}\sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=N}^{\infty} \left|\frac{a_k}{1+a_k}\right| \leq 2\sum_{k=N}^{\infty} |a_k|. \tag{1}$$

Aus der rechten Ungleichung in (1) folgt offensichtlich nach dem Majorantenkriterium, dass: wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiet, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ absolut.

Angenommen nun, die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ absolut konvergiert. Also gilt $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{1+a_k} = 0$. Damit erhalten wir, dass $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Ähnlich wie eben benutzen wir nochmals das Ergebnis der Aufgabe 5a und dann erhalten wir auch die Ungleichungskette (1) für ein $N \in \mathbb{N}$. Folglich folgt die absolute Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ aus der linken Ungleichung in (1).