ulm university universität uulm

Prof. Dr. Friedmar Schulz
Dr. Kim-Hang Le
WS 2018/2019
Gesamt: 40 Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II – Blatt 10

Abgabe und Besprechung: 14:00-16:00, 10.01.2019, N24 - H15

1. Sei $f : \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \} \to \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch $f(x,y) = x^y$. Berechnen Sie mit Hilfe der Taylorschen Formel $1,05^{1,02}$ näherungsweise bis auf einen Fehler kleiner als 10^{-4} mit dem Wissen, dass $1,05^{1,02} = 1,05103....$ [8]

2. Man bestimme jeweils alle kritischen Punkte und ihre Typen: [12]
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \sin x + y^2 - 2y + 1$,
   (b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x,y) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + xy^2 - 5x - 5y$.

3. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(U)$. [4+8]
   (a) Zeigen Sie: Ist f in U *subharmonisch*, d.h. es gilt $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) > 0$ für alle $a \in U$, so besitzt f in U kein lokales Maximum.
   (b) Sei U beschränkt und $f \in C^0(\bar{U}) \cap C^2(U)$ in U *harmonisch*, d.h. es gilt $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = 0$ für alle $a \in U$. Zeige, dass f in $\bar{U}$ das Maximum annimmt, und zwar auf dem Rand von U. *Hinweis:* Betrachten Sie die Funktion $f_k := f + \frac{1}{k} x_1^2$ $(k \in \mathbb{N})$.
   Folgere, dass f in $\bar{U}$ auch das Minimum annimmt, und zwar auf dem Rand von U.

4. Sei $A = (a_{jk})_{j,k=1}^n$ eine reelle quadratische Matrix mit $\det A \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}^n$ ein Spaltenvektor. Zeige, dass die Funktion [8]

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) := |Ax|^2 - 2b^T Ax$$

genau ein Minimum im $\mathbb{R}^n$ besitzt.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neues jahr!