Prof. Dr. Friedmar Schulz
Dr. Kim-Hang Le
WS 2018/2019
Gesamt: 40 Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II – Blatt 11

Abgabe und Besprechung: 14:00-16:00, 17.01.2019, N24 - H15

(*Bitte geben Sie nur die Übungsaufgaben* ***1, 2, 3a***)

1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv-definit und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{2} x A x^T$. [6x3+2]

   (a) Zeigen Sie, dass f unendlich oft differenzierbar ist und bestimmen Sie den Gradienten $\nabla f(x)$.

   (b) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix $D^2 f(x)$ und dann folgere, dass f streng konvex ist.

   (c) Beweisen Sie, dass jedes lokale Minimum von f auch ein globales Minimum ist.

   (d) Geben Sie einen globalen Minimumpunkt von f an.

2. Es seien k Punkte $a^1, \ldots, a^k \in \mathbb{R}^n$ gegeben und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch [10]

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} \left|a^i - x\right|^2$$

   Beweisen Sie, dass f im Punkt $x^0 = \dfrac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} a^i$ minimal ist.

3. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, konvexe Menge und sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.

   (a) Seien $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$ und $t \in [0,1]$ mit $x \pm h \in U$. Beweisen Sie, dass [10]

$$(1+t)f(x) - tf(x-h) \le f(x+th) \le (1-t)f(x) + tf(x+h).$$

   Hinweis: Beweisen Sie die linksseitige Ungleichung, indem wir die Konvexität der Funktion $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(x+th)$ zeigen und Lemma 3.7.4 verwenden.

   (b) Sei $n \in \{1,2\}$. Beweisen Sie mit Hilfe von Teil (a), dass f stetig ist.

https://www.uni-ulm.de/mawi/analysis/lehre/veranstaltungen/ws-20182019/analysis-2/