Prof. Dr. Friedmar Schulz
Dr. Kim-Hang Le
WS 2018/2019
Gesamt: 40 Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II – Blatt 12

Abgabe und Besprechung: 14:00-16:00, 24.01.2019, N24 - H15

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = (e^x - e^y, x+y)$. [8+4]

   (a) Beweisen Sie, dass f eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R}^2$ ist und geben Sie die inverse Abbildung $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ explizit an. Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein C^1-Diffeomorphismus? (d.h., die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist bijektiv, $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\right)$ und $f^{-1} \in C^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\right)$).

   (b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f im Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und die von f^{-1} im Punkt $(z,t) = f(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. (a) Gegeben seien k Punkte $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, k$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate eine Gerade $y = ax + b$ (Ausgleichsgerade), welche die Punkte (x_i, y_i), $i = 1, \dots, k$, am besten approximiert, d.h., $f(a,b) := \sum_{i=1}^{k} (y_i - ax_i - b)^2$ wird minimal. [8]

   (b) Geben Sie die Gerade in Teil (a) explizit an, dabei ist $k = 5$ und sind die Punkte $\{ (s, s^3) : s \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \}$. Welchen Wert nimmt die Gerade an der Stelle $x = 1$? [4]

3. (a) Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ total differenzierbar. Sei weiter $g : (a,b) \to \mathbb{R}$, ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) differenzierbar mit $(x, g(x)) \in U$ und $f(x, g(x)) = c$ für alle $x \in (a,b)$. Folgere aus der Kettenregel: Ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$ in U, so gilt [8]

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))} \text{ für alle } x \in (a,b).$$

   Berechnen Sie danach die zweite Ableitung $g''(x)$ mit Hilfe der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f, falls $f \in C^2(U)$ ist.

   (b) Man zeige, dass mit der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch [8]

$$f(x,y) = \exp(y) + y^3 + x^3 + x^2 - 1$$

   durch die Bedingung $f(x, g(x)) = 0$ für all $x \in \mathbb{R}$ eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ implizit definiert wird. Unter Verwendung von Teil (a) bestimme man $g'(x)$ und die stationären Stellen von g. Man finde die lokalen Extrema der Funktion g und untersuche das Monotonieverhalten von g.