Prof. Dr. Friedmar Schulz
Dr. Kim-Hang Le
WS 2018/2019
Gesamt: 40 Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II – Blatt 13

Abgabe und Besprechung: 14:00-16:00, 31.01.2019, N24 - H15

1. Es sei die stetige Abbildung $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $F(x,y)=(f(x,y),g(x,y))$ ein Gradientenfeld mit dem Potential $\varphi\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, d.h. $\nabla\varphi(x,y)=F(x,y)\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$. [7+7]

   (a) Beweisen Sie, dass eine Funktion $u\in C^1((a,b);\mathbb{R})$, für $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$, genau dann die Differentialgleichung
   $$f(t,u(t))+g(t,u(t))\,u'(t)=0$$
   löst, wenn $\varphi(t,u(t))$ auf (a,b) konstant ist.

   (b) Geben Sie mit Hilfe von Teil (a) eine Lösung $u:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ der folgenden Differentialgleichung an:
   $$2tu^3(t)-e^t+3t^2u^2(t)\,u'(t)=0$$
   unter der Bedingung $u(1)=0$.

2. Gegeben sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y):=(e^x\cos y, e^x\sin y)$. [7+7]

   (a) Zeige: f ist überall lokal injektiv, aber nicht global injektiv.

   (b) Sei $U:=\mathbb{R}\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.
   Zeige, dass $f:U\to f(U)$ für jedes $p\in\mathbb{N}$ ein Diffeomorphismus der Klasse $C^p(U,f(U))$ ist und berechne die Funktionalmatrix der inversen Abbildung $f^{-1}:f(U)\to U$.

3. Es seien f und g die zwei Funktionen der Klasse $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit $f'(x)\geq 1$ und $|g'(x)|<1$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Sei $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ die Funktion definiert durch $\varphi(x,y)=(f(x)+g(y),f(y)+g(x))$. [6+6]

   (a) Zeigen Sie: φ ist ein C^1-Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^2$ auf $\varphi(\mathbb{R}^2)$.
   Hinweis: Beweisen Sie die Injektivität von φ mit Hilfe des Mittelwertsatzes für die Funktionen f, g einer variablen. Verwenden Sie danach Lemma 4.2.10.

   (b) Ferner nehmen wir an, dass es ein $k\in(0,1)$ gibt derart, dass $|g'(x)|<k\ \forall x\in\mathbb{R}$.
   Beweisen Sie: $\varphi(\mathbb{R}^2)=\mathbb{R}^2$.
   Hinweis: Beweisen Sie, dass die Funktion f^{-1} Lipschitz-stetig mit Hilfe des Mittelwertsatzes. Daraus folgt die Lipschitz-stetigkeit der Funktion $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
   $h(y)=f^{-1}\left(v-g\left(f^{-1}(u-g(y))\right)\right)$, für $u,v\in\mathbb{R}$, mit der Lipschitz-Konstanten k^2.
   Damit erhalten wir die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung $y=h(y)$ unter Verwendung des Kontraktionssatzes 2.4.3, die die Surjektivität von $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ liefert.