



## Übungen zur Vorlesung Analysis II – Blatt 3

Abgabe und Besprechung: 14:00-16:00, 08.11.2018, N24 - H12

(Bitte geben Sie nur die Übungsaufgaben 1-4).

1. Seien  $a, b \in \mathbb{R}^+$ . Berechne den Flächeninhalt der Ellipse  $E := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ . [8]

2. Untersuchen Sie die uneigentlichen Integrals auf Konvergenz. [2x6]

(a)  $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$                       (b)  $\int_0^\infty \frac{x^2 + 3}{e^x} dx$

3. Untersuche folgende Reihe auf Konvergenz: [7]

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log^\mu k}, \quad \mu > 0.$$

4. Für  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  seien die Funktionen  $f_k$  auf  $[0, 1]$  definiert durch [5+5+3]

$$f_k(x) = \frac{k^\mu x}{(1 + k^2 x^2)^2}.$$

Für welche Werte von  $\mu$

- (a) konvergiert  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  punktweise auf  $[0, 1]$ ?
- (b) konvergiert  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig auf  $[0, 1]$ ?
- (c) gilt die Beziehung  $\int_0^1 \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 f_k(x) dx$ ?

*Hinweise:* (a) Bestimme die Grenzfunktion  $f$  für  $\mu = 4$  und  $\mu < 4$ .

(b) Untersuche, wann  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in [0,1]} |f_k(x) - f(x)| \right) = 0$  gilt.

5. Die Funktionen  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a < b$  seien beschränkt und Riemann-integrierbar über  $[a, b]$ .

Zeige:

$$\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx.$$

*Hinweis:* Für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt  $0 \leq \int_a^b (f(x) - \lambda g(x))^2 dx$ . Unterscheide die Fälle  $B := \int_a^b g^2(x) dx = 0$  und  $B \neq 0$ .