ulm university universität uulm

Prof. Dr. Friedmar Schulz
Dr. Kim-Hang Le
WS 2018/2019
Gesamt: 40 Punkte

# Übungen zur Vorlesung Analysis II – Blatt 4

Abgabe und Besprechung: 14:00-16:00, 15.11.2018, N24 - H12

*(Bitte geben Sie nur die Übungsaufgaben **1, 2c, 3, 4**).*

1. Wir betrachten den Vektoraum der reellen Folgen $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Zeige, dass die Abbildung [6]

$$d : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}, \quad d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \quad \text{mit} \quad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ und } y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} .$$

eine wohldefinierte Metrik auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiert, die nicht von einer Norm induziert ist.

2. Seien $a < b$ und $V = C^0([a,b])$ der Vektorraum der stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

   (a) (*Tutoriumsaufgabe*) Man zeige, dass durch

$$(f,g) := \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

   ein Skalarprodukt auf $V$ erklärt ist.

   (b) (*Tutoriumsaufgabe*) Seien

$$\|f\|_2 := \sqrt{(f,f)} \quad \text{und} \quad \|f\|_\infty := \sup_{a\le x\le b} |f(x)| .$$

   Man zeige, dass $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty : V \to \mathbb{R}$ Normen sind.

   (c) Beweise, dass es eine Konstante $c_1 > 0$ gibt, sodass [6]

$$\|f\|_2 \le c_1 \|f\|_\infty ,$$

   und dass es kein $c_2 > 0$ gibt, sodass

$$\|f\|_\infty \le c_2 \|f\|_2 \text{ für alle } f \in V.$$

3. (a) Zeige, dass die folgende Funktion $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ den Axiomen einer Metrik genügt. [2.5x4]

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \ne y. \end{cases} \quad (d \text{ heißt die diskrete Metrik})$$

   Für $\varepsilon > 0$ definieren wir die $\varepsilon$-Umgebung von $a \in \mathbb{R}^n$ gemäß $U_\varepsilon(a) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a) < \varepsilon \,\}$.

   (b) Zeige, dass jede Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ bzgl. der diskreten Metrik sowohl offen als auch topologisch abgeschlossen ist.

   (c) Weise nach, dass jede unendliche Teilmenge $C \subset \mathbb{R}^n$ bzgl. der diskreten Metrik zwar beschränkt und topologisch abgeschlossen, aber nicht topologisch kompakt ist. Dabei heißt $B \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ gibt mit $d(x,0) \le c$ für alle $x \in B$.

   (d) Bestimme die bzgl. der diskreten Metrik topologisch kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

4. Sei $A$ eine Punktmenge im $\mathbb{R}^n$. Man beweise die Aussagen aus Lemma 1.3.9: [2.5x7]

   (a) $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann offen, wenn $A \cap \partial A = \varnothing$.

   (b) $A$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\partial A \subset A$.

   (c) $\mathring{A}$ ist die größte offene Menge, die in $A$ enthalten ist:

   $$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{U \subset A,\\ U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}}} U,$$

   (d) $\bar{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die $A$ umfasst:

   $$\bar{A} = \bigcap_{\substack{F \supset A,\\ F \subset \mathbb{R}^n \text{ abg.}}} F,$$

   (e) $\mathring{A} = A \setminus \partial A$, $\bar{A} = A \cup \partial A$.

   (f) $\bar{A} = \mathring{A} \dot{\cup} \partial A$, $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$, hierbei bedeutet $\dot{\cup}$ disjunkte Vereinigung.

   (g) $\mathcal{C}(\mathring{A}) = \overline{\mathcal{C}A}$, $\mathcal{C}(\bar{A}) = (\mathcal{C}A)^{\circ}$.