Prof. Dr. Friedmar Schulz
Dr. Kim-Hang Le
WS 2018/2019
Gesamt: 40+5* Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II – Blatt 5

Abgabe und Besprechung: 14:00-16:00, 22.11.2018, N24 - H15

1. Gegeben sei die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$. [6+6]

   (a) Bestimme für $c\in\mathbb{R}$ die Schnittmenge $G_f\cap\left\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;y=c\,\right\}$ und skizziere sie für $c=-1,0,1$.

   (b) Bestimme die Niveaumenge $\Gamma_0=\left\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;f(x,y)=0\,\right\}$ durch einen Wechsel zu Polarkoordinaten.

2. (Sphärische Koordinaten) Betrachte die Abbildung [5+6]

$$\Psi:\{(\rho,\varphi,\vartheta)\ \mid \rho>0,\ -\pi<\varphi\le\pi,\ 0<\vartheta<\pi\}\longrightarrow\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,z)\ \mid z\in\mathbb{R}\}$$

$$(\rho,\varphi,\vartheta)\longmapsto(x,y,z)=\Psi(\rho,\varphi,\vartheta):=(\rho\cos\varphi\sin\vartheta,\rho\sin\varphi\sin\vartheta,\rho\cos\vartheta)\,.$$

   (a) Zeigen Sie, dass Ψ ist bijektiv, indem Sie der Beziehung $\Psi=\Phi_z\circ\Phi_\varphi$ erklären, dabei ist Φ_z die Zylinderkoordinatenabbildung von dem $r\varphi z$-Raum nach dem xyz-Raum (in der Vorlesung) und ist Φ_φ die Zylinderkoordinatenabbildung:

$$\Phi_\varphi:\{(\rho,\varphi,\vartheta)\ \mid \rho>0,\ -\pi<\varphi\le\pi,\ 0<\vartheta<\pi\}\longrightarrow\{(r,\varphi,z)\ \mid r>0,\ -\pi<\varphi\le\pi,\ z\in\mathbb{R}\}$$

$$(\rho,\varphi,\vartheta)\longmapsto(r,\varphi,z)=\Phi_\varphi(\rho,\varphi,\vartheta)=(\rho\sin\vartheta,\varphi,\rho\cos\vartheta)\,.$$

   (b) Skizziere in folgenden Fällen die zugehörigen Kurven in dem xyz-Raum unter die sphärische Koordinatenabbildung Ψ:

      i. ϑ läuft von 0 nach π wärend r und φ konstant bleiben.

      ii. φ läuft von $-\pi$ nach π wärend r und ϑ konstant bleiben.

      iii. r läuft von 0 nach R mit $R>0$ wärend φ und ϑ konstant bleiben.

3. Die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sei definiert durch [12]

$$f(x,y):=\begin{cases}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y} & \text{für } xy\ne0\\ 0 & \text{für } xy=0.\end{cases}$$

   Zeige, dass die iterierten Grenzwerte $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$ und $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$ nicht existieren und dass der Grenzwert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ existiert.

4. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen: [5*+5]

   (a) Der Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen ist im Allgemeinen nicht offen, die Vereinigung beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist im Allgemeinen nicht abgeschlossen.

   (b) Falls $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ stetig ist und A offen, so ist $f(A)$ offen.