ulm university universität uulm

Prof. Dr. Friedmar Schulz
Dr. Kim-Hang Le

WS 2018/2019
Gesamt: 40+5* Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II – Blatt 6

Abgabe und Besprechung: 14:00-16:00, 29.11.2018, N24 - H15

1. Sei $a > 0$. Untersuchen Sie die folgende Funktion auf Stetigkeit: [12]

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{|x|^a |y|^a}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und seien $f, g : D \to \mathbb{R}^m$ Abbildungen. Zeige: [5x3]

   (a) f ist genau dann stetig in D, wenn das Urbild jeder abgeschlossenen Menge $A \subset \mathbb{R}^m$ relativ abgeschlossen in D ist, das heißt, es gibt eine abgeschlossene Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ mit $f^{-1}(A) = B \cap D$.

   (b) Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und sind f, g stetig, so ist $M := \{\, x \in D \mid f(x) = g(x) \,\} \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen.

   (c) Sind f, g stetig und liegt $A \subset D$ dicht in D, so liegt $f(A) \subset f(D)$ dicht in $f(D)$, und aus $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A$ folgt, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D$.

3. Sei $A = (a_{jk})_{j,k=1\ldots n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reelle $n \times n$-Matrix und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. [6]

   Betrachte die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ f(x) := A \circ x + b$, d.h. $f_j(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk} x_k + b_j,\ j = 1, \ldots, n$.
   Folgere mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung aus dem Kontraktionssatz:
   Gilt $\sum\limits_{j,k=1}^{n} a_{jk}^2 < 1$, so besitzt f genau einen Fixpunkt, d.h. die Gleichung $f(x) = x$ besitzt genau eine Lösung.

4. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei die Funktion f definiert durch: [7]

$$f : \mathbb{R}^n \to U_1(0) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1 \,\},\ f(x) := \frac{x}{1+|x|}.$$

   Zeige, dass f ein Homöomorphismus ist (d.h. f ist bijektiv; f und f^{-1} sind stetig).

5. Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und nicht-leer mit $A \cap B = \varnothing$. [5*]
   Zeige, dass es eine in $\mathbb{R}^n$ stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = 1$ für $x \in A$, $f(x) = 0$ für $x \in B$ und $0 < f(x) < 1$ für $x \in \mathcal{C}(A \cup B)$.

   Hinweis: Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{\rho_B(x)}{\rho_A(x) + \rho_B(x)}$ mit der Funktion $\rho_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\rho_E(x) := d(x, E)$ für $\varnothing \neq E \subset \mathbb{R}^n$. Zeige zunächst, dass $|\rho_E(x) - \rho_E(a)| \leq |x - a|$ für alle $a, x \in \mathbb{R}^n$ und $\overline{E} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho_E(x) = 0\}$.