Prof. Dr. Friedmar Schulz
Dr. Kim-Hang Le
WS 2018/2019
Gesamt: 40 Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II – Blatt 7

Abgabe und Besprechung: 14:00-16:00, 06.12.2018, N24 - H15

*(Bitte geben Sie nur die Übungsaufgaben **2-5**)*

1. Zeige, dass die Funktion
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := y\sqrt{2x^2 + y^2}$$
in $\mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar ist.

2. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit [14]
$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$
Man zeige:
   (a) f ist stetig.
   (b) f ist partiell differenzierbar in $\mathbb{R}^2$ und stetig (partiell) differenzierbar in $\mathbb{R}^2 \setminus \{ (0,0) \}$.

3. Seien $a \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$. Weiter sei $f : U_r(a) \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion auf $U_r(a)$. [8]
Zeige: Hat f in $U_r(a)$ beschränkte partielle Ableitungen, so ist f Lipschitz-stetig in $U_r(a)$.

4. Zeige, dass die Funktion [10]
$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x,t) := t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$
eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist, d.h. es gilt
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = 0 \text{ für alle } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+.$$

5. Sei $n \geq 2$ und $f : \mathbb{R}^n \setminus \{ 0 \} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Man zeige, dass es mindestens ein Paar diametraler Punkte $x,\ -x$ gibt mit $f(x) = f(-x)$. [8]
Hinweis: Sie können zeigen, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{ 0 \}$ wegweise zusammenhängend ist, also auch zusammenhängend. Damit verwenden Sie den Zwischenwertsatz von Bolzano.