ulm university universität uulm

Prof. Dr. Friedmar Schulz
Dr. Kim-Hang Le
WS 2018/2019
Gesamt: 40 Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II – Blatt 8

Abgabe und Besprechung: 14:00-16:00, 13.12.2018, N24 - H15

*(Bitte geben Sie nur die Übungsaufgaben **1-3 und 4a**)*

1. (a) Geben Sie eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ an, die an allen Punkten die partiellen Ableitungen hat, aber an mindestens einem Punkt nicht stetig ist. [6+6]

   (b) Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}$ partiel differenzierbar auf U. Geben Sie eine geeignete Bedingung an der partiellen Ableitungen von f an, sodass f stetig ist.

2. Betrachte folgende Funktion: [6+5+5]

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

   Zeige die folgende Behauptungen:

   (a) f ist partiell differentierbar.

   (b) Die partiellen Ableitungen von f sind nicht stetig.

   (c) f ist total differenzierbar.

3. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man zeige:
   f ist genau dann total differenzierbar in U mit $Df(x) = 0$ für alle $x \in U$, wenn f konstant ist. [6]

4. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit $0 \in U$.

   (a) Sei $f : U \to \mathbb{R}$ total differenzierbar in 0 mit $f(0) = 0$, und sei $g : U \to \mathbb{R}$ stetig in 0.
   Zeige, dass $h := f \cdot g$ in 0 total differenzierbar ist und bestimme $Dh(0)$. [6]

   (b) Sei $n = 2$, $f : U \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$.
   f sei in $(0,0)$ nach x partiell differenzierbar, und die partielle Ableitung von f nach y existiere in U und sei stetig in $(0,0)$. Zeige, dass f in $(0,0)$ total differenzierbar ist.
   Hinweis: Schreiben Sie

$$\begin{aligned} & f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y) \\ = \; & \left[f(x,y) - f(x,0) - y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right] + \left[f(x,0) - f(0,0) - x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right]. \end{aligned}$$

   Danach verwenden Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung einer Variablen.