Prof. Dr. Friedmar Schulz
Dr. Kim-Hang Le
WS 2018/2019
Gesamt: 40 Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis II – Blatt 9

Abgabe und Besprechung: 14:00-16:00, 20.12.2018, N24 - H15

*(Bitte geben Sie nur die Übungsaufgaben **2, 3**)*

1. Sei f die Funktion definiert durch $f(x,y,z) := x^2 + ze^y$ und sei der Richtungsvektor $e = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$. Bestimmen Sie im Punkt $a = (0,0,1)$ die Gleichung der Tangentialebene, die Ableitung in Richtung e und die Richtung und Größe des stärksten Anstiegs.

2. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $f(x,y) = \begin{cases} x, & xy \geq 0, \\ x+y, & xy < 0. \end{cases}$ [8x3]

   (a) Beweisen Sie, dass für jeden Richtungsvektor $e = (e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$, d.h. $|e| = 1$, gilt: der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(he) - f(0,0)}{h}$ existiert und dann ist f im Nullpunkt in Richtung e differenzierbar.

   (b) Ist f total differenzierbar im Nullpunkt?

   (c) Sei der Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ derart, dass f dort total differenzierbar ist. Ferner nehmen wir an, dass $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ und $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) = \sqrt{2}$, dabei sind die Richtungsvektoren $u = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ und $v = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Bestimmen Sie $\frac{\partial f}{\partial \omega}(x_0,y_0)$ für $\omega = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ und dann geben Sie den Richtungsvektor $e \in \mathbb{R}^2$ an, für den $\frac{\partial f}{\partial e}(x_0,y_0)$ maximal wird.
   Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die total Ableitung $Df(x_0,y_0)$.

3. (a) Berechnen Sie für die Funktion [8x2]

$$f : \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^2 \to \mathbb{R},\ f(x) = f(x_1,x_2) := \frac{1}{1 - x_1 - x_2}$$

   das Taylorpolynom vom Grad $N \in \mathbb{N}$ mit Entwicklungspunkt $a = (0,0)$, d.h.

$$T^{(N)} f(a,x) = \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{D^\alpha f(0,0)}{\alpha!} x^\alpha \quad \text{für } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}_0^2.$$

   Hinweis: Beweise mit Hilfe des Induktionsprinzips, dass $D^\alpha f(x) = \frac{|\alpha|!}{(1 - x_1 - x_2)^{|\alpha|+1}} \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^2$.

   (b) Bestimmen Sie das dritte Taylorpolynom $T^{(3)} f\big(a, (x,y)\big)$ von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \cos(x)\sin(y)\, e^{x-y}$ mit Entwicklungspunkt $a = (0,0)$.