ulm university universität uulm

Dr. Jonas Tölle
Dr. Kim-Hang Le
WS 2018/2019
Gesamt: 40 Punkte

Übungen zur Vorlesung Analysis III – Blatt 1

(Abgabe und Besprechung: 10:00-12:00, 29.10.18, O27-H20)

0. Beachte bitte unbedingt die folgenden Punkte!

   (a) *Melde dich in Moodle (moodle.uni-ulm.de) für diese Veranstaltung an,*

   (b) *Die Lösungen sollen einzeln vor der Übung abgegeben werden,*

   (c) *Voraussetzung zur Zulassung zur Prüfung sind das Erreichen von 50% der Summe aller Punkte auf den Übungsblättern.*

1. Sei ϕ eine Funktion definiert durch: [8]

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \phi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

   Zeige: $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. *Hinweis*: Beweise durch vollständige Induktion, dass für $x > 0$ und $k \geq 0$ die k-te Ableitung von ϕ durch die Formel $\phi^{(k)}(x) = P_k(\frac{1}{x})\, e^{-\frac{1}{x}}$ gegeben ist, wobei P_k ein Polynom ist.

2. Es sei $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ $(k < n)$ eine C^r-Funktion $(r \geq 1)$ mit $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j=1}^k \neq 0$. Sei weiter $\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ die Projektion, die durch $\Pi(x, y) = x$ mit $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^{n-k}$ definiert ist. [5+5]

   (a) Zeige, dass es offene Untermengen U und V von $\mathbb{R}^k$ und eine C^r- Funktion $g : V \to U$ gibt, so dass $a \in U$ und $(g \circ \Pi)(f(x)) = x$ für alle $x \in U$. ($G = g \circ \Pi$ heißt eine „lokale linke Inverse" von f).
   Hinweis: Lokaler Umkehrsatz.

   (b) Geben Sie eine „lokale linke Inverse" in $x = 0$ der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x) := (\cos x, \sin x)$ an.

3. Es sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\alpha(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, eine reguläre parametrisierte C^1-Kurve (d.h. eine stetig differenzierbar Kurve). Die Bogenlänge von α ist definiert als [3×4]

$$s(t) = \int_a^t \left|\alpha'(\tau)\right| d\tau,$$

   wobei $|\alpha'(\tau)| = \sqrt{(x_1'(\tau))^2 + ... + (x_n'(\tau))^2}$.

   (a) Zeige, dass $s : [a, b] \to [0, \mathcal{L}(\alpha)]$ ein C^1-Diffeomorphismus ist.

   (b) Sei γ eine Umparametrisierung von α nach der Bogenlänge (d.h. $\gamma = \alpha \circ s^{-1}$). Zeige, dass $|\gamma'(t)| = 1$ $\forall t \in [0, \mathcal{L}(\alpha)]$.

   (c) Ist die Kurve $\alpha : [0, 2] \to \mathbb{R}^3$ mit $\alpha(t) = \left(t\sqrt{2}, e^t, 1 - e^{-t}\right)$ regulär? Wenn ja, bestimme die Bogenlange $s(t)$.

4. Betrachte das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $F(x, y) := \left(xy, \dfrac{2 - 2y^2}{1 + x^2 + y^2}\right)$ und zwei reguläre parametrisierte differenzierbare Kurven $\gamma_1 : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ und $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma_1(t) = (0, t)$, $\gamma_2(t) = (\sin t, \cos t)$.
   Berechne $\int_{\gamma_1} F(u) \cdot d\overrightarrow{u}$ und $\int_{\gamma_2} F(u) \cdot d\overrightarrow{u}$. [5+5]

https://www.uni-ulm.de/mawi/analysis/lehre/veranstaltungen/ws-20182019/analysis-3/