Dr. Jonas Tölle
Dr. Kim-Hang Le
WS 2018/2019
Total point: 40+6*

# Übungen zur Vorlesung Analysis III – Blatt 2

(Abgabe und Besprechung: 10:00-12:00, 12.11.18, O27-H20)

1. Betrachte das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch [3x5]

$$f(x,y) := (f_1(x,y), f_2(x,y)) = \left(e^{xy} + xye^{xy},\ x^2e^{xy} - 2y\right)$$

   (a) Zeigen Sie, dass dieses Vektorfeld eine Potentialfunktion besitzt.

   (b) Berechnen Sie diese Potentialfunktion $F$.
   *Hinweis*: Wir wissen, dass $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y)$. Bestimmen Sie eine Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so, dass $F(x,y) = h(x,y) + g(y)$ mit einem $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Danach bestimme die Funktion $g$.

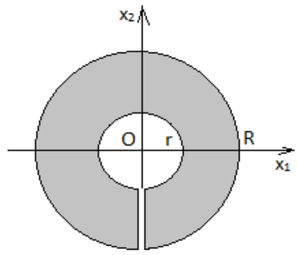
   (c) Berechnen Sie für die Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) := \left(t, 1-t^2\right)$ das Kurvenintegral $\int_\gamma f(u) \cdot d\overrightarrow{u}$.

2. (a*) Beweise, dass jede konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend ist. [3*]

   (b) Es seien $(X_1, d_1)$ und $(X_2, d_2)$ metrische Räume und $g : X_1 \to X_2$ ein Homöomorphismus, d.h. $g$ ist eine stetige Bijektion mit einer stetigen Inversen. Zeige, dass wenn $A \subseteq X_1$ einfach zusammenhängend ist, dann ist $g(A)$ einfach zusammenhängend. [5]

   [5]

   (c) Nutze (*a*) und (*b*), um zu zeigen, dass für $0 < r < R$, die Menge $\left\{x \in \mathbb{R}^2 : r < |x| < R\right\} \setminus \left\{(0, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq 0\right\}$ einfach zusammenhängend ist.




3. Seien $f, h \in C(\mathbb{R}^n)$ und $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$, d.h. $g$ ist eine stetige Funktion mit kompaktem Träger. Zur Erinnerung: Die Faltung von $f$ und $g$ ist definiert durch:

$$f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad (f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy.$$

   Beweise die folgenden Eigenschaften:

   (a) $f * g$ ist stetig. [5]

   (b) $f * g = g * f$ und $(f + h) * g = f * g + h * g$. [5]

   (c) Wenn $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq k \leq \infty$, dann haben wir $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und für $|\alpha| \leq k$, [5]

$$D^\alpha(\varphi_\varepsilon * f) \longrightarrow D^\alpha f \quad \text{gleichmäßig auf Kompakta in } \mathbb{R}^n, \quad \text{wenn } \varepsilon \to 0,$$

   wobei die Familie der Funktionen $\{\varphi_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ ein Mollifier ist, d.h. $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ mit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ wobei $\varphi \geq 0$ in $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \overline{B_1(0)}$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi dx = 1$.

   (d) Gibt es eine geeignete Bedingung an $f \in C(\mathbb{R}^n)$, so dass $\varphi_\varepsilon * f \longrightarrow f$ gleichmäßig in $\mathbb{R}^n$? [3*]