Prof. Dr. Jonas Tölle
Dr. Kim-Hang Le
WS 2018/2019
Gesamtpunkte: 40

Übungen zur Vorlesung Analysis III – Blatt 3

(Abgabe und Besprechung: 10:00, 26.11.18, O27-H20)

1. (a) (*Polarkoordinaten Tranformation*) Seien $U := B_R(0) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\right\}$ mit $R > 0$ oder $R = +\infty$ und $f \in C^0(U)$ mit $\iint_U |f(x,y)|\,dxdy < +\infty$. Beweisen Sie unter der Verwendung der Transformationsformel (Satz A.4.2 im Anhang), dass gilt: [5]

$$\iint_U f(x,y)\,dxdy = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^R f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\;drd\varphi.$$

(b) Verwenden Sie die Formel in Teil (a), um zu zeigen, dass folgendes gilt: $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx = 1$, wobei die Funktion φ wie folgt definiert ist: [5]

$$\varphi(x) := \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{2}}.$$

2. Seien $U := B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ mit $R > 0$ oder $R = +\infty$ und $f \in C^0(U)$ mit $\int_U |f(x)|\,dx < +\infty$. Schreiben Sie $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ in folgender Form: $x = r\xi$, wobei $r = |x|$ und $\xi = \frac{x}{|x|} = (\xi_1, ..., \xi_{n-1}, \xi_n)$ mit $\xi_n = \pm\sqrt{1 - \sum_{j=1}^{n-1}\xi_j^2}.$ Zeigen Sie, dass gilt: [10]

$$\int_U f(x)dx = \int_0^R r^{n-1}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r\xi)dS_\xi dr,$$

wobei $\mathbb{S}^{n-1} := \partial B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ und wobei das Integral einer Funktion $g \in C^0\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$ über der Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ wie folgt definiert ist:

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} g(\xi)\,dS_\xi = \int_{|\xi'|<1} \frac{g\left(\xi', \sqrt{1-|\xi'|^2}\right) + g\left(\xi', -\sqrt{1-|\xi'|^2}\right)}{\sqrt{1-|\xi'|^2}}d\xi',$$

wobei $\xi' = (\xi_1, .., \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ (die allgemeine Definition des Flächenintegrals wird später formuliert).

Hinweis: Betrachten Sie

$$I = \left\{(\xi', r) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, 0 < r < R,\ \xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1},\ \left|\xi'\right|^2 = \sum_{j=1}^{n-1}\xi_j^2 < 1\right\},$$

und definieren Sie Abbildungen $T^\pm = x^\pm : I \to U_R^\pm := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in U_R |\ x_n \gtrless 0\}$ durch

$$\begin{cases} x_j^\pm(\xi', r) := r\xi_j, \quad \text{for } j = 1, \ldots, n-1, \\ x_n^\pm(\xi', r) := \pm\, r\sqrt{1 - |\xi'|^2}, \end{cases}$$

und verwenden Sie die Transformationsformel.

3. Beweisen Sie die folgenden Aussagen: [5×4]

   (a) Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, dann ist M eine n-dimensionale C^∞- Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

   (b) $M = \left\{\left(3x, -x^2\right),\ x \in \mathbb{R}\right\}$ ist eine 1-dimensionale C^∞- Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$.

   (c) $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\right\}$ ist keine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$.

   (d) Sei $M = M_1 \times M_2$, dabei für $i = 1, 2$ ist M_i eine k_i-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n_i}$. Dann ist M eine $(k_1 + k_2)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ mit $n = n_1 + n_2$.

   (e) Die Menge $SL(n, \mathbb{R}) := \left\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} : \det A = 1\right\}$ ist eine $(n^2 - 1)$-dimensionale C^∞- Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n^2}$.

https://www.uni-ulm.de/mawi/analysis/lehre/veranstaltungen/ws-20182019/analysis-3/