Dr. Jonas Tölle
Dr. Kim-Hang Le
WS 18/19
Gesamtpunktzahl: 40

Übungen zur Vorlesung Analysis III – Blatt 4

(Abgabe und Besprechung: 10:00, 10.12.18, O27-H20)

1. Es bezeichne $E_m \in \mathbb{R}^n$ die m-dimensionale Ebene: [10]

$$E_m := \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{m+1} = ... = x_n = 0\}.$$

Zeigen Sie: Eine nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann m-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^l, falls es zu jedem $x_0 \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und einen C^l-Diffeomorphismus $F : U \to V$ von U auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $F(M \cap U) = E_m \cap V$.

2. Sei $M = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0 \text{ und } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4\right\}$. [6+6]

   (a) Beweisen Sie, dass M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist.

   (b) Zeigen Sie: Es gibt eine glatte Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $g(1, -1) = (1, -1)$ und für (x_2, x_3) ausreichend nahe an $(1, -1)$ gilt $(g_1(x_2, x_3), x_2, x_3, g_2(x_2, x_3)) \subset M$. Bestimmen Sie $Dg(1, -1)$.

   Hinweis: Verwenden Sie den Satz von der impliziten Funktion.

3. Sei $\mathbb{S}^n$ die Einheitssphäre des $\mathbb{R}^{n+1}$. [4+8+6]

   (a) Beweisen Sie, dass $\mathbb{S}^n$ eine n-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

   (b) Seien N, S der Nordpol bzw. der Südpol von $\mathbb{S}^n$, d.h. $N = (0, ..., 0, 1)$, $S = (0, ..., 0, -1)$. Betrachten Sie die Abbildung π_N (die stereographische Projektion), definiert durch

$$\pi_N : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n \quad ,$$

   die jeden Punkt $P \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ auf dem Schnittpunkt der Geraden NP mit der Ebene $\left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x^{n+1} = 0\right\} \cong \mathbb{R}^n$ abbildet. Analog ist die stereographische Projektion π_S von S definiert. Bestimmen Sie $\pi_N(x)$ für $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ und $\pi_S(x)$ für $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$.

   (c) Zeige: π_N, π_S sind bijektiv und ihre Umkehrfunktionen π_N^{-1}, π_S^{-1} sind die C^∞-glatte Karten (Parametrisierungen) von $\mathbb{S}^n$.