Dr. Jonas Tölle
Dr. Kim-Hang Le
WS 18/19
Total points: 40+6*

Übungen zur Vorlesung Analysis III – Blatt 8

(Abgabe und Besprechung: 10:00, 04.02.19, O27-H20)

1. Untersuchen Sie die Fourierreihe folgender Funktionen auf Konvergenz (punktweise oder gleichmäßig) und bestimmen Sie die Grenzwertfunktionen, falls sie existieren. [6+6]

   (a) Die Funktion f, die wie in Aufgabe 2 auf Blatt 7 gegeben ist.

   (b) Die Funktion $g(x) := \sin(2x) + \cos(3x)$.

2. Der Folgenraum der quadratsummierbaren Folgen ist definiert als [6x2+6*]

$$\ell^2 := \Big\{\alpha : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C},\ \alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ mit } \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty\Big\}.$$

   Auf ℓ^2 definieren wir die folgende Abbildung:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{C}, \quad \langle\alpha,\beta\rangle := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \overline{\beta_n},$$

   falls $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $\beta = (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

   (a) Geben Sie ein Element von ℓ^2 an, welches nicht gleich Null ist.

   (b) Beweisen Sie, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf ℓ^2 ist.

   (c) Beweisen Sie, dass ℓ^2 mit die induzierten Norm ein Hilbertraum ist.

3. Die Riemannsche Zeta-Funktion ist die Funktion die durch [8+8]

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{für alle } s > 1,$$

   definiert ist.

   (a) Es sei f die 2π-periodische Funktion, definiert durch $f(x) := x - \pi, \quad x \in [0, 2\pi)$. Zeigen Sie, dass die Fourierkoeffizienten von f durch

$$c_0(f) = 0; \quad c_n(f) = \frac{i}{n}, \quad n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

   gegeben sind und verwenden Sie dann die Parsevalsche Gleichung aus Theorem 2.5.4, um $\zeta(2)$ zu berechnen.

   (b) Berechnen sie analog $\zeta(4)$ unter Berücksichtigung der 2π-periodischen Funktion g, die durch $g(x) := (x-\pi)^2,\ x \in [0, 2\pi)$ definiert ist.
   (Lösung: $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ und $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$).