Advanced Topics in the Calculus of Variations

Lösung Blatt 1

Aufgabe 1 (a) Setze $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$$h(\lambda) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y).$$
Nun: $h(0)=0$, $h|_{(0,1)} \geq 0$
$$\Longrightarrow 0 \leq \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{h(\lambda)-h(0)}{\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} h(\lambda)$$
$$= f(x) - f(y) - \nabla f(\lambda x + (1-\lambda)y)\cdot(x-y)\Big|_{\lambda=0}$$
$$= f(x) - f(y) - \nabla f(y)\cdot(x-y)$$

(b) Lemma von Mazur: $A \subset X$ konvex & abgeschlossen
$\Longrightarrow A$ schwach folgenabgeschlossen.

Auf die Konvexität kann nicht verzichtet werden!
Gegenbeispiel: $X = H$ beliebiger Hilbertraum und separabel.
$A = \partial B_1(0) = \{u \in H \mid \|u\|_H = 1\}$.

- A abgeschlossen als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Funktion: $A = \|\cdot\|_H^{-1}(\{1\})$ und $\|\cdot\|_H : H \to \mathbb{R}$ ist stetig
- A ist nicht schwach folgenabgeschlossen, denn sei $(e_n)_{n=1}^\infty$ eine ONB von H. Bem: $(e_n)_{n=1}^\infty \subset A$ und $e_n \rightharpoonup 0 \notin A$

Beweis: Sei $h^* \in H^*$. Satz von Riesz-Fréchet
$\Longrightarrow \exists x \in H : h^*(w) = (x, w) \; \forall w \in H.$
$\Longrightarrow h^*(e_n) = (x, e_n) \; \forall n \in \mathbb{N}$
Nun gilt $h^*(e_n) = (x, e_n) \longrightarrow 0 \; (n\to\infty)$ denn
wegen der Parseval-Identität gilt
$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 = \|x\|^2 < \infty.$$

(c) Wir zeigen $W^{1,p}_g$ ist konvex und abgeschlossen
Abgeschlossenheit Sei $T: W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$ der Spuroperator

Dann: $W^{1,p}_g = \{u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) \mid u|_{\partial\Omega} = g\}$
$= \{u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m) \mid T(u) = g\} = T^{-1}(\{g\})$

Abgeschlossen als Urbild einer abg. Menge unter einer stetigen Abb.

Konvexität Seien $u_1, u_2 \in W^{1,p}_g(\Omega;\mathbb{R}^m)$, $\lambda \in (0,1)$. Dann
$$T(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) = \lambda T(u_1) + (1-\lambda) T(u_2) = \lambda g + (1-\lambda) g = g$$
$$\Longrightarrow \lambda u_1 + (1-\lambda) u_2 \in W^{1,p}_g.$$

Aufgabe 2 (a) z.z. F w.l.s.c. $\Longleftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}$ $N_\alpha := \{x \in X \mid F(x) \le \alpha\}$ schwach abgeschlossen

„$\Rightarrow$" Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $(x_n)_{n=1}^\infty \subset N_\alpha$: $x_n \rightharpoonup x$. z.z. $x \in N_\alpha$

Bew.: $F(x) \le \liminf_{n\to\infty} F(x_n) \le \alpha \Longrightarrow x \in N_\alpha$ qed.

„$\Leftarrow$" Sei $x_n \rightharpoonup x$. Setze: $\alpha := \liminf_{n\to\infty} F(x_n) + \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$.

Es gibt nun eine TF $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$: $F(x_{n_k}) \le \alpha$ d.h.

$x_{n_k} \in N_\alpha$. Da TF schwach konvergenter Folgen schwach konvergieren gilt $x_{n_k} \rightharpoonup x$ und somit $x \in N_\alpha$ da N_α schwach abgeschlossen

$$\Longrightarrow F(x) \le \alpha = \liminf_{n\to\infty} F(x_n) + \varepsilon,$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war folgt $F(x) \le \liminf_{n\to\infty} F(x_n)$

(b) F 'stark' unterhalbstetig und konvex. z.z. F schwach unterhalbstetig

Analog zu Aufgabe 2(a) kann man sich überlegen:

F 'stark' unterhalbstetig $\Longleftrightarrow \{x \in X \mid F(x) \le \alpha\}$ abgeschlossen $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Auch gilt: F konvex $\Longrightarrow \{x \in X \mid F(x) \le \alpha\}$ konvex $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Nun gilt also

F unterhalbstetig und konvex

$\Longrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\{x \in X : F(x) \le \alpha\}$ abgeschlossen und konvex

$\overset{\text{Mazur}}{\Longrightarrow} \forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\{x \in X : F(x) \le \alpha\}$ schwach folgenabgeschlossen

$\overset{\text{A2(a)}}{\Longrightarrow}$ F ist w.l.s.c qed.

(c) Bsp Sei $X = H$ ein separabler Hilbertraum. $F: H \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x) := -\|x\|_H$. F ist unterhalbstetig, da $\|\cdot\|_H$ stetig. F ist aber nicht schwach unterhalbstetig denn sei $(e_n)_{n=1}^\infty$ eine ONB von H. Wie bereits in Aufgabe 1(b) gesehen, gilt $e_n \xrightarrow{H} 0$

aber $\mathcal{F}(e_n) = -1 \ \forall n \in \mathbb{N} \implies 0 = \mathcal{F}(0) \neq \liminf_{n \to \infty} \mathcal{F}(e_n) = -1.$

<u>Aufgabe 3</u> $X = L^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Wähle $u_0(x) := \begin{cases} C \exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right) & |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

wobei $C \geq 0$ so, dass $\int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,dx = 1$ und setze

$u_n(x) := n\, u_0(nx)$. Wir zeigen: $(u_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ beschränkt in L^1 aber

(u_n) hat keine schwach konvergente Teilfolge.

<u>Beschränktheit</u>

$$\int_{\mathbb{R}} |u_n(x)| = \int_{\mathbb{R}} n u_0(nx) \overset{\substack{\text{Subst.}\\ y = nx}}{=} \int_{\mathbb{R}} u_0(y)\,dy = 1$$

$\implies (u_n)$ beschränkt.

<u>Angenommen</u> $\exists (n_k)$ sodass $u_{n_k} \xrightarrow{L^1} u$ für ein $u \in L^1(\mathbb{R})$

(a) $u \geq 0$ fü, denn $u_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $\{w \in L^1(\mathbb{R}) \mid w \geq 0 \text{ fü}\}$

ist abgeschlossen und konvex, daher schwach abgeschlossen.

(! Die Menge ist abgeschlossen da jede L^1-konvergente Folge eine fast überall konvergente TF hat)

Nun: $\int_{\mathbb{R}} u(x)\,dx = \int u(x)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x)\,dx = (u, \underbrace{\mathbb{1}_{\mathbb{R}}}_{\in L^\infty(\mathbb{R}) = L^1(\mathbb{R})'})$

$= \lim_{k\to\infty} (u_{n_k}, \mathbb{1}_{\mathbb{R}}) = \lim_{k\to\infty} \int u_{n_k}(x)\,dx$

$= 1 \implies u \not\equiv 0$. fü (*)

Aber sei $m \in \mathbb{N}$. setze $A_m = (-\infty, -\frac{1}{m}) \cup (\frac{1}{m}, \infty)$

$$\int_{A_m} |u(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} u(x)\, \mathbb{1}_{A_m}(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int u_{n_k}(x)\, \mathbb{1}_{A_m}(x)$$

Nun $\operatorname{supp} u_{n_k} = \overline{B_{\frac{1}{n_k}}(0)}$ ist disjunkt zu A_m falls

$n_k > m$

$$\implies \int_{A_m} |u(x)|\,dx = \lim_{\substack{k\to\infty\\ n_k > m}} \underbrace{\int u_{n_k}(x)\, \mathbb{1}_{A_m}(x)\,dx}_{= 0 \text{ da } \operatorname{supp} u_{n_k} \cap A_m = \emptyset} = 0$$

$\implies u(x) = 0$ fü auf A_m

$\overset{\text{Vereinigung abzb vieler Nullmengen}}{\implies} u(x) = 0$ fü auf $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\implies u \equiv 0$ fü ↯ zu (*)

$\underline{X = \ell^1(\mathbb{N})}$. Wähle $e_k = (0, \_\_ 0, 1, 0, \_\_ \dots)$.
$\hookrightarrow$ k-te Stelle,

<u>Angenommen</u> $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ hat eine schwach konvergente Teilfolge $(e_{\ell_k})_{k\in\mathbb{N}}$ d.h. $\forall \varphi \in \ell^\infty(\mathbb{N}) = \ell^1(\mathbb{N})^*$

$$\langle e_{\ell_k}, \varphi\rangle \xrightarrow{(\spadesuit)} \langle e, \varphi\rangle .$$

Sei $\varphi = (\varphi^{(n)})_{n=1}^{\infty} = \left(\begin{cases} 1 & n=\ell_k \text{ für gerades } k \\ -1 & n=\ell_k \text{ für ungerades } k \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\right)_{n=1}^{\infty}$.

<u>Dann ist $\varphi \in \ell^\infty(\mathbb{N}) = \ell^1(\mathbb{N})^*$</u>.

Nun $\langle e_{\ell_k}, \varphi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} e_{\ell_k}^{(n)} \varphi^{(n)} = \varphi_{\ell_k} = \begin{cases} 1 & k \text{ gerade} \\ -1 & k \text{ ungerade}\end{cases}$

$\Rightarrow$ $\langle e_{\ell_k}, \varphi\rangle$ ist nicht konvergent, ein Widerspruch zu $(\spadesuit)$.

(b) Sei $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset W^{1,1}_g$ eine Folge derart, dass $F(u_n) \xrightarrow{n\to\infty} \inf_{W^{1,1}_g} F$.

OBdA $\sup_{n\in\mathbb{N}} F(u_n), \inf_{W^{1,1}_g} F < \infty$. Wir zeigen, dass u_n eine schwach konvergente Teilfolge in $W^{1,1}_g$ hat. Hierzu nehmen wir den Satz von Dunford-Pettis aus der Vorlesung:

<u>Satz</u> $\lim_{M\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|f_n|>M\}} |f_n| \, dx = 0 \Longrightarrow (f_n)_{n=1}^{\infty} \subset L^1$ schwach präkompakt.

Nun betrachte $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{|Du_n|>M} |Du_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{|Du_n|>M} \sqrt{1+|Du_n|^2}$

$$\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{|Du_n|>M} \sqrt{1+|Du_n|^2} \cdot \frac{\log(1+|Du_n|^2)}{\log(1+M^2)} \leq \frac{\sup_{n\in\mathbb{N}} F(u_n)}{\log(1+M^2)} \xrightarrow{(M\to\infty)} 0$$

$\Longrightarrow (Du_n)$ gleichmäßig integrierbar $\Longrightarrow \exists\, V \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ und eine TF (Du_{k_n}) sodass $Du_{k_n} \xrightarrow{L^1} V$

<u>Problem</u> Man benötigt noch schwache Konvergenz der u_{k_n} in L^1 und dass V ein Gradient eines $u \in W^{1,1}_g$ ist ist auch noch gänzlich unklar.

<u>Rettung</u> Einbettungssätze $W^{1,1}(\Omega) \xhookrightarrow{\text{kompakt}} L^q(\Omega)\ \forall 1 \leq q < \frac{d}{d-1}$, insbesondere $W^{1,1}(\Omega) \xhookrightarrow{\text{kompakt}} L^1(\Omega)$. Wenn wir zeigen können, dass die $(u_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ in $W^{1,1}(\Omega)$ beschränkt sind, so folgt sofort dass sie eine (sogar stark) konvergente Teilfolge in $L^1(\Omega)$ haben. Wir benutzen die <u>Poincaré-Ungleichung</u>: $\forall u \in W^{1,1}(\Omega)$ gilt

$$\|u\|_{W^{1,1}(\Omega)} \leq C\left(\|T(u)\|_{L^1(\partial\Omega)} + \|Du\|_{L^1(\Omega)}\right)$$

für ein C was nicht von u abhängt, hierbei ist $T: W^{1,1}(\Omega) \to L^1(\partial\Omega)$ der Spuroperator.

<u>Damit</u> $$\|u_{k_n}\|_{W^{1,1}(\Omega)} \leq C\left(\|T(u_{k_n})\|_{L^1(\partial\Omega)} + \|Du_{k_n}\|_{L^1(\Omega)}\right)$$
$$\leq C\Big(\|g\|_{L^1(\partial\Omega)} + \underbrace{\|Du_{k_n}\|_{L^1(\Omega)}}_{\text{beschränkt da schwach konvergente Folgen beschränkt sind}}\Big)$$

$\Longrightarrow (u_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ beschränkt

$\Longrightarrow \exists$ TF $(u_{k_{n_\ell}})_{\ell=1}^{\infty}$: $u_{k_{n_\ell}} \xrightarrow{L^1} u$ für ein $u \in L^1$

Damit auch $u_{k_{n_\ell}} \xrightarrow{L^1} u$ für ein $u \in L^1$.

Situation $u_{k_n} \xrightarrow{L^1} u$, $Du_{k_n} \xrightarrow{L^1} V$. Beh: u ist schwach differenzierbar und $Du = V$. Bew.: Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R})$

$$\int u\, \partial_j \varphi\, dx \underset{\substack{\text{schw.}\\ \text{Konvergenz}}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \int u_{k_n} \partial_j \varphi\, dx = \lim_{n\to\infty} -\int D_j u_{k_n} \varphi\, dx$$

$$= -\int V_j\, \varphi\, dx.$$ Nach der Definition der schwachen Ableitung ist $D_j u = V_j$.

$$\Rightarrow u_{k_n} \xrightarrow{L^1} u,\ Du_{k_n} \xrightarrow{L^1} Du \xRightarrow{\text{Vorlesung}} u_{k_n} \xrightarrow{W^{1,1}} u$$

Nun muss man noch zeigen, dass $\mathcal{F}$ schwach unterhalbstetig ist. Hierzu kann man ~~ein~~ z.B. Theorem 3 (aus der VL) verwenden:

~~Z~~: $F(x) := \sqrt{1+|x|^2}\, \log(1+|x|^2)$ ist konvex und glatt und ~~glatt~~ nach unten beschränkt: glatt ✓ Nach unten beschränkt ✓

Konvex: $\nabla F(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}} \log(1+|x|^2) + \frac{2}{\sqrt{1+|x|^2}} \right) x$

$$\partial_i \partial_j F(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}} \log(1+|x|^2) + \frac{2}{\sqrt{1+|x|^2}} \right) \delta_{ij} - \frac{\log(1+|x|^2)\, x_i x_j}{(1+|x|^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow D^2F(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}} \log(1+|x|^2) + \frac{2}{\sqrt{1+|x|^2}} \right) I - \frac{\log(1+|x|^2)}{(1+|x|^2)^{3/2}}\, x x^T$$

Householder-Matrix $\Rightarrow$ Eigenwerte sind

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}} \log(1+|x|^2) + \frac{2}{\sqrt{1+|x|^2}} \geq 0 \quad \text{und}$$

$$\lambda_n = \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}} \log(1+|x|^2) + \frac{2}{\sqrt{1+|x|^2}} - \frac{\log(1+|x|^2)}{(1+|x|^2)^{3/2}} \underbrace{x^T x}_{=|x|^2}$$

$$= \frac{\log(1+|x|^2)}{(1+|x|^2)^{3/2}} (1+|x|^2 - |x|^2) + \frac{2}{\sqrt{1+|x|^2}} \geq 0$$

$\Rightarrow$ Beh (siehe Beweis der direkten Methode)

Aufgabe 4 (a) Sei $\varphi \in C_c^2(\Omega;\mathbb{R})$. Dann (wie in der Vorlesung)

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{F}[u+t\varphi] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_\Omega F(Du + tD\varphi)\, dx$$

$$\underset{\substack{F\in C^2,\ \text{Maßraum endlich}\\ \text{Dominierte Konvergenz}}}{=\!=} \int_\Omega \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(Du+tD\varphi)\, dx$$

$$= \int_\Omega \nabla F(Du) \cdot D\varphi\, dx \stackrel{\text{PI}}{=\!=} -\int_\Omega \operatorname{div}_x \left(\nabla F(Du(x))\right) \varphi\, dx$$

Nach dem Hauptlemma der Variationsrechnung ist

$$0 \stackrel{!}{=} \operatorname{div}_x \left(\nabla F(Du(x))\right) = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} \left[\partial_j F(Du(x))\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{d} \sum_{i=1}^{d} \partial^2_{ij} F(Du(x))\, \partial_{x_j} (D_i u(x)) = \sum_{i,j=1}^{d} \partial^2_{ij} F(Du(x))\, D^2_{ij} u(x)$$

$$= D^2 F(Du(x)) : D^2 u(x)$$

<u>Elliptische DGL</u> " $\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\, \partial^2_{x_i x_j} u(x) = 0$ " heißt elliptisch falls $(a_{ij}^{(x)})_{ij}$ positiv definit ist. $\forall x \in \Omega$

<u>Hier</u>: $a_{ij}(x) = \underbrace{\left(D^2 F(Du(x))\right)_{ij}}_{\text{positiv definit}} \implies$ Euler Lagrange Gleichung ist elliptisch.

(b) Wähle $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ derart dass $\mathcal{F}(u_n) \longrightarrow \inf_{u \in H} \mathcal{F}(u)$.

OBdA $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(u_n) < \infty$, $\inf_{u \in H} \mathcal{F}[u] < \infty$.

<u>Wir zeigen</u> $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset H$ beschränkt in H.

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(u_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2} \|u_n\|^2 - h^*(u_n)$$

$$\geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2} \|u_n\|_H^2 - \|h^*\|_{H^*} \|u_n\|_H$$

$\boxed{\text{Peter Paul: } a, b > 0 \Rightarrow ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2 \ \forall \varepsilon > 0}$

$$\geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2} \|u_n\|_H^2 - \frac{1}{4} \|u_n\|^2 - \|h^*\|^2$$

$$\geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{4} \|u_n\|_H^2 - \|h^*\|^2$$

$$\implies \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_H^2 \leq 4 \left(\|h^*\|^2 + \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(u_n) \right) < \infty$$

$$\implies \exists\, u_{e_n}, \bar{u} \in H : u_{e_n} \xrightarrow{H} \bar{u}$$

<u>Beh</u> $\mathcal{F}(\bar{u}) \leq \liminf_{n \to \infty} \mathcal{F}[u_{e_n}] = \inf_{u \in H} \mathcal{F}(u)$

$$\mathcal{F}[\bar{u}] = \underbrace{\frac{1}{2} \|\bar{u}\|^2}_{\leq \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{2} \|u_{e_n}\|^2} - \underbrace{h^*(\bar{u})}_{= \lim_{n \to \infty} h^*(u_{e_n})} \leq \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{2} \|u_{e_n}\|^2 - h^*(u_{e_n}) = \liminf_{n \to \infty} \mathcal{F}[u_{e_n}]$$

Normen sind w.e.s.c.

da $u_{e_n} \rightharpoonup \bar{u}$ (Definition

(c) Sei x ein globaler Minimierer von Aufgabe 2(b).

Dann $\forall v \in H$

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{F}[x + tv] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(\frac{1}{2} \|x + tv\|^2 - h^*(x + tv) \right)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 - 2t(x,v) + t^2\|v\|^2 - h^\alpha(x) - t h^\alpha(v)\right)$$

$$= (x,v) - h^*(v) \implies h^*(v) = (x,v) \quad \forall v \in H.$$

Vorstufe:

Aufgabe 5 Sei $f \in L^2(\Omega;\mathbb{R})$ sodass

$$\int_\Omega f(x)\eta(x)\,dx = 0 \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$\Longrightarrow (f,\eta)_{L^2} = 0 \ \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega)$$

$$\Longrightarrow (f,\eta)_{L^2} = 0 \quad \forall \eta \in \underbrace{\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^2}}}_{= L^2(\Omega)}$$

$$\Longrightarrow (f,\eta)_{L^2} = 0 \quad \forall \ \eta \in L^2(\Omega)$$

$$\Longrightarrow (f,f)_{L^2} = 0 \Longrightarrow f \equiv 0.$$

Nun $f \in L^1_{loc}(\Omega;\mathbb{R})$. Angenommen $f \not\equiv 0$ f.ü.

$\Longrightarrow \exists\, A \subset \Omega$ Lebesguemessbar sodass $\lambda(A) > 0$ und $f \not\equiv 0$ f.ü. auf A

$\Longrightarrow \exists\, K \subset \Omega$ kompakt sodass $\lambda(K) > 0$ und $f \not\equiv 0$ f.ü. auf K, da

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) \mid K \subset A \text{ kompakt}\}.$$

Nun setze $\eta_{\varepsilon,\delta}(x) := \left(\frac{f(x)}{\sqrt{f(x)^2+\delta^2}} \cdot \chi_K\right) * \underbrace{\varphi_\varepsilon}_{\text{Standard mollifier}} \qquad \varepsilon, \delta > 0$

$\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ falls $\varepsilon < \operatorname{dist}(K, \Omega^C)$

$$\Longrightarrow 0 = \int f(x) \underbrace{\eta_{\varepsilon,\delta}(x)}\, dx$$

$\eta_{\varepsilon,\delta}(x) \xrightarrow{\text{pktw f.ü.}} \frac{f(x)}{\sqrt{f(x)^2+\delta^2}}\chi_K$ da Konvergenz in L^p $\forall p$

endlang einer TF $\leftarrow$ zusätzlich: $|\eta_{\varepsilon,\delta}(x)| \le 1 \quad \forall \varepsilon > 0$

$$\xrightarrow{\varepsilon \to 0} \int \frac{|f(x)|^2}{\sqrt{|f(x)|^2+\delta^2}}\chi_K\, dx \xrightarrow[\text{Monotone Konvergenz}]{\delta \to 0} \int_K |f(x)|\, dx$$

$\Longrightarrow f(x) \equiv 0$ für auf K. ↯ zu ☼ ☼