

Aufgabe 50

(a) ε nicht koerziv denn $\forall u \in H_0^1(\Omega)$ gilt

$$\varepsilon(tu) = t^2 \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 dx - t^{p+2} \frac{1}{p+2} \int |u|^{p+2} dx$$

$\xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty$ für $t \rightarrow \infty$ da $p+1 > 2$

gedoch gilt $\|tu\| \rightarrow \infty$ für $u \neq 0$.

Damit hat ε keinen globalen Minimierer, da

$$\inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \varepsilon(u) = -\infty$$

Zu den kritischen Punkten von ε

Sei $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Dann gilt

$$D\varepsilon(u)(\varphi) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varepsilon(u+t\varphi)$$

$$= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(\frac{1}{2} \int |\nabla(u+t\varphi)|^2 - \frac{1}{p+2} \int |u+t\varphi|^{p+2} \right)$$

$$= \int \nabla u \nabla \varphi - \int |u|^{p-2} u \varphi$$

$$\Rightarrow \left[\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varepsilon(u+t\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \right]$$

$$\Leftrightarrow u \text{ löst } \begin{cases} -\Delta u - |u|^{p-2} u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{schwach.}$$

(b) Es sei $(u_k)_{k=1}^\infty$ eine Palais-Smale-Folge.

Nun gilt

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(u_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \int |\nabla u_k|^2 - \frac{1}{p+2} \int |u_k|^{p+2} \right) =: \eta$$

Beachte $D\varepsilon(u_k)(\varphi) = \int \nabla u_k \nabla \varphi - \int |u_k|^{p-2} u_k \varphi.$

Insbesondere gilt $D\mathcal{E}(u_k)(u_k) = \int |\nabla u_k|^2 - \int |u_k|^{p+2}$

Nun

$$\int |\nabla u_k|^2 = 2\mathcal{E}(u_k) + \frac{2}{p+2} \int |u_k|^{p+2}$$

$$= 2\mathcal{E}(u_k) + \frac{2}{p+2} \left(-D\mathcal{E}(u_k)(u_k) + \int |\nabla u_k|^2 \right)$$

$$= 2\mathcal{E}(u_k) - \frac{2}{p+2} D\mathcal{E}(u_k)(u_k) + \frac{2}{p+2} \int |\nabla u_k|^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(1 - \frac{2}{p+2}\right)}_{> 0!} \int |\nabla u_k|^2 = 2\mathcal{E}(u_k) - \frac{2}{p+2} D\mathcal{E}(u_k)(u_k)$$

$$\leq 2\mathcal{E}(u_k) + \frac{2}{p+2} \underbrace{\|D\mathcal{E}(u_k)\|}_{\rightarrow 0} \|u_k\|$$

$$\leq 2\mathcal{E}(u_k) + \underbrace{\varepsilon \|u_k\|^2}_{= \int |\nabla u_k|^2} + (C(\varepsilon) \|D\mathcal{E}(u_k)\|)^2$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{2}{p+2} - \varepsilon\right) \int |\nabla u_k|^2 \leq \underbrace{2\mathcal{E}(u_k)}_{\leq C} + C(\varepsilon) \underbrace{\|D\mathcal{E}(u_k)\|^2}_{\leq C}$$

$$\text{Wähle } \varepsilon := \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{p+2}\right) > 0$$

und erhalte

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{p+2}\right) \int |\nabla u_k|^2 \leq C$$

für ein $C > 0$
unabhängig von k .

$$\Rightarrow \left(\int |\nabla u_k|^2 \right)_{k=1}^{\infty} \text{ beschränkt}$$

(C) Es sei $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Palais-Smale-Folge.

$$\sum \text{N.A.e.T } u_k \rightarrow u.$$

Zunächst $(u_k)_{k=1}^{\infty} \subset H_0^1(\Omega)$ beschränkt

$\Rightarrow$ N.A.e.T

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k \xrightarrow{H_0^1(\Omega)} u \\ u_k \xrightarrow{L^{p+2}(\Omega)} u \\ u_k \rightarrow u \text{ für} \\ \exists g \in L^{p+2}(\Omega) : |u_k| \leq |g| \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

da $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+2}(\Omega)$
kompakt.

$$\text{Noch } \sum \|u_k\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

[das genügt nach
Satz 1.5 da
 $H_0^1(\Omega)$ glm. konv.]

Daher gilt für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\int \nabla u \nabla \varphi = \int |u|^{p-2} u \varphi$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \int \nabla u_k \nabla \varphi = \int |u|^{p-2} u \varphi$$

denn $\int \nabla u_k \nabla \varphi \rightarrow \int \nabla u \nabla \varphi$ da $u_k \xrightarrow{H_0^1} u$

und $|u_k|^{p-2} u_k \varphi \xrightarrow{\text{p.k.t.}} |u|^{p-2} u \varphi$

und $| |u_k|^{p-2} u_k \varphi | = |u_k|^p |\varphi| \leq |g|^p |\varphi| \in L^2$

da $\int |g|^p |\varphi| \leq \left(\int |g|^{p+2} \right)^{\frac{p}{p+2}} \left(\int |\varphi|^{p+2} \right)^{\frac{1}{p+2}} < \infty$

$\Rightarrow |u_k|^{p-2} u_k \varphi$ hat eine L^2 -Majorante

$$\Rightarrow \int |u_k|^{p-2} u_k \varphi \rightarrow \int |u|^{p-2} u \varphi.$$

Nun

$$\begin{aligned} & \int \nabla u \nabla \varphi - \int |u|^{p-2} u \varphi \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int \nabla u_k \nabla \varphi - \int |u_k|^{p-2} u_k \varphi \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} D\mathcal{E}(u_k)(\varphi) = 0 \quad \text{da } (u_k)_{k=1}^{\infty} \end{aligned}$$

eine Palais-Smale Folge ist.

$$\Rightarrow \int \nabla u \nabla \varphi - \int |u|^{p-2} u \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Setze nun $\varphi = u$ ein und finde

$$0 = \int |\nabla u|^2 - \int |u|^{p+2}$$

$$\Rightarrow \int |\nabla u|^2 dx = \int |u|^{p+2}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \int |u_k|^{p+2}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int |u_k|^{p+2} - \int |\nabla u_k|^2 \right)$$

$$+ \lim_{k \rightarrow \infty} \int |\nabla u_k|^2$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{- D\mathcal{E}(u_k)(u_k)}_{\substack{\leq \|D\mathcal{E}(u_k)\| \|u_k\| \\ \text{Nullfolge} \\ \rightarrow 0}} + \lim_{k \rightarrow \infty} \int |\nabla u_k|^2 \end{aligned}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \int |\nabla u_k|^2$$

$$\Rightarrow \|u_k\|_{H_c^1}^2 \longrightarrow \|u\|_{H_c^1}^2 \xrightarrow[\text{da auch } u_k \rightarrow u]{\text{Satz 1.5}} u_k \longrightarrow u$$

Also d)

$\Sigma \varepsilon$ hat Mountain-Pass-Struktur, d.h.

1) $\varepsilon(0) = 0$

2) $\exists \rho > 0 \exists \alpha > 0 : \|u\|_{H_c^1} = \rho \Rightarrow \varepsilon(u) \geq \alpha$

3) $\exists u_1 \in H_c^1(\mathbb{R}) : \|u_1\|_{H_c^1(\mathbb{R})} > \rho \text{ und } \varepsilon(u_1) < \alpha$

Dann folgt mit dem Mountain-Pass-Lemma:

$\exists u_{\text{krit}}$ kritischer Punkt von ε mit Energie

$$\beta := \inf_{\substack{p \in C([0,1], H_c^1) \\ p(0)=0, p(1)=u_1}} \sup_{t \in [0,1]} \varepsilon(p(t)) \geq \alpha > 0$$

$$\geq \alpha \text{ da jeder Pfnd } \partial B_\rho(0) \text{ schneiden muss.}$$

Nun: 1) $\varepsilon(0) = 0 \checkmark$

$$\begin{aligned} 2) \varepsilon(u) &= \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} \int |u|^{p+1} \\ &= \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} \left[\left(\int |u|^{p+1} \right)^{\frac{2}{p+1}} \right]^{\frac{p+1}{2}} \\ &\geq \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} \left[\frac{1}{S(p, \mathbb{R})} \int |\nabla u|^2 dx \right]^{\frac{p+1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - \frac{1}{(p+1) (S(p, \mathbb{R})^{\frac{p+1}{2}})} \left(\int |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{p+1}{2}} \end{aligned}$$

Also gilt auf $\partial B_\rho(0)$

$$\varepsilon(u) \geq \frac{1}{2} \rho^2 - \frac{1}{(p+1) S(p, \mathbb{R})^{\frac{p+1}{2}}} \rho^{p+2}$$

Wähle nun $J_0 := \left[\frac{1}{4}(p+1) S(p, \Omega)^{\frac{p+1}{2}} \right]^{\frac{1}{p-1}}.$

Dann gilt $\int_0^{p-1} = \frac{1}{4} (p+1) S(p, \Omega)^{\frac{p+1}{2}}$

$$\Rightarrow \frac{\int_0^{p+2}}{(p+1) S(p, \Omega)^{\frac{p+1}{2}}} = \frac{1}{4} \int_0^2$$

Auf ∂B_{J_0} gilt dann

$$\mathcal{E}(u) \geq \frac{1}{2} \int_0^2 - \frac{1}{(p+1) S(p, \Omega)^{\frac{p+1}{2}}} \int_0^{p+2}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 - \frac{1}{4} \int_0^2 = \frac{1}{4} \int_0^2$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} (p+1) S(p, \Omega)^{\frac{p+1}{2}} \right]^{\frac{1}{p-1}} =: \alpha > 0$$

3) Wie bereits in Aufgabe 5(a) gezeigt gilt

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}(tu) = -\infty.$$

$$\Rightarrow \exists u_1 \in H_0^1(\Omega) : \begin{cases} \|u_1\| > \rho_0 \\ \mathcal{E}(u_1) < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 5.1

$$S_1 Q \subset H, S \cap \partial Q = \emptyset.$$

$S_1 Q$ heißen Verschlungen falls $\forall h \in C^0(H, H) : h|_{\partial Q} = \text{id}$

gilt dass $S \cap h(Q) \neq \emptyset$

Bsp in $\mathbb{R}^2$



(a) Es sei $\Sigma \in C_{loc}^{2,2}(H, \mathbb{R})$ die Palais-Smale-Bedingung erfüllend

Sei zusätzlich $\alpha := \inf_{u \in S} \Sigma(u) > \sup_{u \in Q} \Sigma(u)$.

Zu $\beta := \inf_{\substack{h \in C^0(H, H) \\ h|_{\partial Q} = \text{id}}} \sup_{u \in Q} \Sigma(h(u))$ ist ein kritischer

Wert von Σ , und $\beta \geq \alpha$

Zu $\beta \geq \alpha$: Sei $h \in C^0(H, H) : h|_{\partial Q} = \text{id}$.

Da S, Q verschlungen sind gilt $h(Q) \cap S \neq \emptyset$.

$$\Rightarrow \sup_{u \in Q} \Sigma(h(u)) \geq \sup_{v \in h(Q)} \Sigma(v) \geq \sup_{v \in h(Q) \cap S} \Sigma(v)$$

$$\geq \inf_{u \in S} \Sigma(u) = \alpha. \Rightarrow \beta \geq \alpha.$$

Zum kritischen Wert Angenommen β ist kein

kritischer Wert, d.h. $K_\beta = \emptyset$. Wähle

$\varepsilon < \frac{1}{2}(\alpha - \sup_{u \in Q} \Sigma(u))$. Dann gilt nach dem

Deformationslemma : $\exists \delta < \varepsilon \exists \Phi \in C^0(H \times [0, 1]; H)$ mit

(a) $\Phi(u, 0) = u \quad \forall u \in H$

(b) $\Phi(u, 1) = u \quad \forall u \in H : \Sigma(u) > \beta + \varepsilon \text{ oder } \Sigma(u) < \beta - \varepsilon$

(c) $\Sigma(\Phi(u, t)) \downarrow$ auf $[0, 1]$

(d) $\Phi(E_{\beta+\delta}, 1) \subset E_{\beta-\delta}$

wobei $E_\alpha := \{u \in H : \Sigma(u) \leq \alpha\}$.

Sei nun $h \in C^0(H, H)$ so, dass $h|_{\partial Q} = \text{id}$ und

$\sup_{u \in Q} \Sigma(h(u)) < \beta + \delta$. [Ein solches h existiert wegen der Definition von β]

Sei nun $\tilde{h} \in C^0(H, H)$ definiert durch

$$\tilde{h}(u) = \Phi(h(u), 1).$$

Es gilt

1) $\tilde{h} \in C^0(H, H)$ da Verkettungen stetiger Abbildungen stetig sind.

2) $\tilde{h}|_{\partial Q} = \text{id}$ denn $\forall u \in \partial Q$ gilt

$$\varepsilon(h(u)) = \varepsilon(u) \leq \sup_{u \in \partial Q} \varepsilon(u) \stackrel{\substack{\text{Werte} \\ \text{von } \varepsilon}}{\leq} \frac{1}{2} (\alpha + \sup_{u \in \partial Q} \varepsilon(u))$$

$$\leq \alpha - \varepsilon \leq \beta - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall u \in \partial Q : \Phi(h(u), 1) = h(u) = u$$

$$\Rightarrow \forall u \in \partial Q : \tilde{h}(u) = u.$$

Damit ist $\tilde{h}$ für die Infimumsbildung für β zulässig

$$\text{und } \sup_{u \in Q} \varepsilon(\tilde{h}(u)) \geq \beta. \quad (*)$$

Da $\sup_{u \in Q} \varepsilon(h(u)) < \beta + \delta$ gilt hat man $h(Q) \subset E_{\beta+\delta}$

$$\Rightarrow \tilde{h}(Q) = \Phi(h(Q), 1) \subset \Phi(E_{\beta+\delta}, 1) \subset E_{\beta-\delta}$$

$$\Rightarrow \forall u \in Q : \tilde{h}(u) \in E_{\beta-\delta}$$

$$\Rightarrow \sup_{u \in Q} \varepsilon(\tilde{h}(u)) \leq \beta - \delta \quad \nleftrightarrow \text{ zu } (*)$$

Aufgabe 51(b)

Man fixiere $g, u_1, \alpha, \varepsilon$ wie aus dem Mountain -

Pass - Lemma. Nun wähle

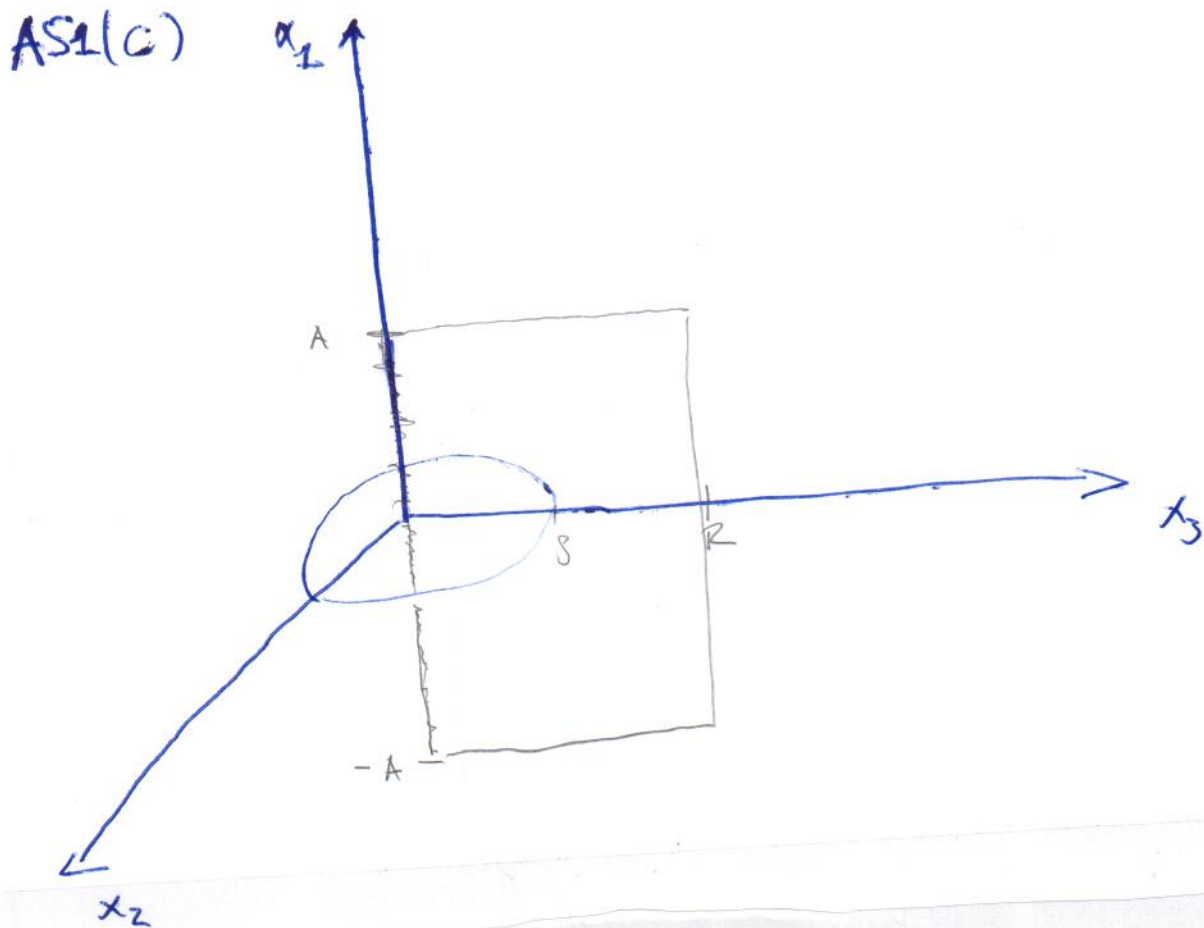
$$S = \partial B_g(o), \quad Q = \{tu_1 \mid 0 \leq t \leq 1\} \quad [\Rightarrow \partial Q = \{o, u_1\}]$$

Dann gilt $\inf_{u \in S} \varepsilon(u) \geq \alpha$ und

$$\sup_{u \in \partial Q} \varepsilon(u) = \max \{ \varepsilon(o), \varepsilon(u_1) \} < \alpha$$

Ferner sind S, Q verschlungen, da $S \cap \partial Q = \emptyset$

aber jede stetige Abbildung $h \in C^0(K, \mathbb{R})$:
 $h(0) = 0$, $h(u_1) = u_1$ erfüllt $h(Q) \cap S \neq \emptyset$.
 da $f: t \mapsto \|h(tu_1)\|$ stetig ist und $f(0) = 0 < \alpha$
 sowie $f(1) = \|u_1\| > \alpha \xRightarrow{\text{ZWS}} \exists \xi \in (0, 1) : f(\xi) = \alpha$.
 $\Rightarrow h(\xi u_1) \in S \Rightarrow h(Q) \cap S \neq \emptyset$.



AS1 d)

Beachte $\left\{ \frac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k}} \right\}_{k=1}^{\infty}$ ist eine ONB von $H_0^1(\Omega)$.

Bew 1) Orthogonalität $\left(\frac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k}}, \frac{\varphi_l}{\sqrt{\lambda_l}} \right)_{H_0^1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \lambda_l}} \int \nabla \varphi_k \nabla \varphi_l$
 $= \frac{\lambda_k}{\sqrt{\lambda_k \lambda_l}} \int \varphi_k \varphi_l = \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_l}} \delta_{kl} = \delta_{kl}$

2) Vollständigkeit Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ so, dass
 $\left(\frac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k}}, u \right) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Es folgt: $\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int \nabla \varphi_k \nabla u = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda_k} \int \varphi_k u = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow (\varphi_k, u) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow u = 0$ da $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega)$ vollständig.

Außerdem gilt $\forall u \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(u, \frac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k}} \right)_{H_0^1}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \left(\int \nabla u \nabla \varphi_k \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(\int u \varphi_k \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (u, \varphi_k)_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Nun sei $\Sigma: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Sigma(u) := \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2} \int |u|^2 dx - \frac{1}{p+1} \int |u|^{p+1} dx$$

wobei $\lambda \notin \{\lambda_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Somit gibt es $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$\lambda \in (\lambda_{k_0-1}, \lambda_{k_0})$ (mit der Konvention $\lambda_0 = 0$)

Setze $V := \text{span} \{ \varphi_{k_0}, \varphi_{k_0+1}, \dots \}^{\perp}$. Dann gilt

$$V^{\perp} = \text{span} \{ \varphi_1, \dots, \varphi_{k_0-1} \}.$$

Für $p > 0$ und $A, R > 0$ setze

$$S_p := \{u \in V : \|u\|_{H^1} = p\} \text{ und}$$

$$Q_{A,R} := \{sv + w \mid w \in V^\perp, \|w\| \leq A, s \in [0, 2\pi]\}.$$

Nach der Bemerkung zu A5.1(c) sind für alle $R > p$.

S_p und $Q_{A,R}$ verschlungen.

Wir zeigen: 1) $\exists p > 0 : \inf_{u \in S_p} \varepsilon(u) > 0$.

2) $\exists A > 0, R > p : \sup_{u \in Q_{A,R}} \varepsilon(u) < 0$

1) Für $u \in V$ berechnen wir

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2} \int |u|^2 - \frac{1}{p+1} \int |u|^{p+1}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (u, \varphi_k)_{L^2}^2 - \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (u, \varphi_k)_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1} \int |u|^{p+1}$$

$(u, \varphi_k)_{L^2} = 0$
 $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1$
 da $u \in V$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^{\infty} \lambda_k (u, \varphi_k)_{L^2}^2 - \frac{\lambda}{2} \sum_{k=k_0}^{\infty} (u, \varphi_k)_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1} \int |u|^{p+1}$$

$\lambda_k \leq \lambda_{k+1}$

$$\geq \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^{\infty} \lambda_k (u, \varphi_k)_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\lambda_{k_0}} \sum_{k=k_0}^{\infty} \lambda_k (u, \varphi_k)_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1} \int |u|^{p+1}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k_0}}\right) \sum_{k=k_0}^{\infty} \lambda_k (u, \varphi_k)_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1} \int |u|^{p+1}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k_0}}\right) \|u\|_{H^1}^2 - \frac{1}{p+1} \int |u|^{p+1}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k_0}}\right) \int |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} \int |u|^{p+1}$$

$\xleftarrow{\text{we A5.1(d)}}$

$$\geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{k_0}}\right) \int |\nabla u|^2 - \frac{1}{(p+1)S(p, \lambda) \sum_{k=1}^{p+1}} \left(\int |\nabla u|^2 \right)^{\frac{p+1}{2}}$$

Damit gilt auf S_p :

$$\forall u \in S_p \quad \mathcal{E}(u) \geq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{h_{k_0}}\right) \rho^2 - \frac{1}{(p+2) S(p, R)^{\frac{p+2}{2}}} \rho^{p+2} =: f(\rho)$$

Wähle nun $\rho > 0$ so klein, dass $f(\rho) > 0$.

$$\Rightarrow \inf_{u \in S_p} \mathcal{E}(u) > 0$$

2) Falls $sv + w \in \partial Q_{AR}$ so ist eine der folgenden Bedingungen erfüllt

(a) $S = \emptyset$

(b) $S = R$

(c) $\|w\| = A$

In Fall (b), (c) gilt $\|sv + w\| \geq \min\{A, R\}$.

Da $V^\perp$ endlichdimensional ist, gilt wegen Lemma 1 (siehe Ende der Aufgabe), dass $\mathcal{E}(u) \rightarrow -\infty$ falls

$$\|u\|_{V^\perp} \rightarrow -\infty$$

$$\Rightarrow \exists R_0 > 0, A_0 > 0 : R \geq R_0, A \geq A_0 \Rightarrow \sup_{\substack{sv + w \in \partial Q_{AR} \\ S = R \\ \text{oder } \|w\| = A}} \mathcal{E}(u) < 0.$$

Im Fall (a) gilt $sv + w = w \in \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{k_0-1}\}$ und

daher

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(sv + w) &= \mathcal{E}(w) = \frac{1}{2} \int |\nabla w|^2 - \frac{\lambda}{2} \int |w|^2 - \frac{1}{p+2} \int |w|^{p+2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} h_k (w, \varphi_k)_{L^2}^2 - \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (w, \varphi_k)_{L^2}^2 - \frac{1}{p+2} \int |w|^{p+2} \\ &\stackrel{w \in \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{k_0-1}\}}{=} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k_0-1} h_k (w, \varphi_k)_{L^2}^2 - \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^{k_0-1} (w, \varphi_k)_{L^2}^2 - \frac{1}{p+2} \int |w|^{p+2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k_0-1} \underbrace{(h_k - \lambda)}_{\leq 0} \underbrace{(w, \varphi_k)_{L^2}^2}_{\geq 0} - \frac{1}{p+2} \int |w|^{p+2} \leq 0. \end{aligned}$$

Wählt man nun $R := \min\{R_0, \rho\}$ und $A := A_0$ so

$$\text{gilt } \sup_{u \in \partial Q_{A,R}} \Sigma(u) \leq 0 \Rightarrow \inf_{u \in \partial S_\rho} \Sigma(u) > \sup_{u \in \partial Q_{A,R}} \Sigma(u).$$

$\Rightarrow$ Mit Aufgabe 51(a) folgt die Existenz eines kritischen Punktes u_{krit} mit $\Sigma(u_{\text{krit}}) \geq \inf_{u \in \partial S_\rho} \Sigma(u) > 0$.

Es fehlt noch Lemma 1

Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ von der Gestalt

$f(x) = g(x) - h(x)$ für eine stetige 2-homogene Funktion g und eine $p+1$ -homogene Funktion h , die $\inf_{\partial B_1(0)} h > 0$ erfüllt

Dann gilt

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \text{Bew } f(x) &= |x|^2 g\left(\frac{x}{|x|}\right) - |x|^{p+1} h\left(\frac{x}{|x|}\right) \\ &\leq |x|^2 \underbrace{\sup_{\partial B_1(0)} g}_{< \infty \text{ da } \partial B_1 \text{ kompakt}} - |x|^{p+1} \underbrace{\inf_{\partial B_1(0)} h}_{> 0} \end{aligned}$$

$$\rightarrow -\infty$$

~~mit~~

Aufgabe S2

(a) Es sei $H < 0$, $\max_{x \in \Omega} |H| |u_0(x)| < 1$

$$\exists \begin{cases} \Delta u = 2H (\partial_x u \times \partial_y u) & \text{in } \Omega \\ u = u_0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

hat eine Lösung

Bew löse zunächst

$$\begin{cases} \Delta v = 2(-H) \partial_x v \times \partial_y v & \text{in } \Omega \\ v = -u_0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Dann gilt für $u := -v$, dass

$$\begin{aligned} \Delta u &= -\Delta v = -2(-H) (\partial_x v \times \partial_y v) \\ &= 2H (\partial_x v \times \partial_y v) \\ &= 2H (\partial_x (-u) \times \partial_y (-u)) \\ &= 2H (\partial_x u \times \partial_y u) \end{aligned}$$

$$u|_{\partial\Omega} = -v|_{\partial\Omega} = -(-u_0)|_{\partial\Omega} = u_0|_{\partial\Omega} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Formal: Da} \\ \text{der Spuroperator} \\ \text{linear ist} \end{array} \right)$$

AS2(b)

$$a \cdot (b \times c) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - c_3 b_1 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix}$$

$$= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 (b_3 c_1 - c_3 b_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

$$= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 c_3 b_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 - c_1 b_2 a_3$$

mit der Regel von Sarrus. Die Behauptung folgt durch Vergleich der Terme.

ASZ(c)

(i) Es sei $u \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$u_m(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \varphi_{\frac{1}{m}}(x-y) dy$$

wobei $(\varphi_{\frac{1}{m}})_{m=1}^\infty$ der Standard-Mollifier ist, erfüllt

$$u_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap H^1(\mathbb{R}^n) \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad u_m \xrightarrow{H^1(\mathbb{R}^n)} u$$

Ferner gilt $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$|u_m(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \varphi_{\frac{1}{m}}(x-y) dy \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)| |\varphi_{\frac{1}{m}}(x-y)| dy$$

$$\leq \|u\|_\infty \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{\frac{1}{m}}(x-y) dy}_{=1} \leq \|u\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|u_m\|_\infty \leq \|u\|_\infty \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

(ii) Es sei $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$

$$\Rightarrow \exists Eu \in H^1(\mathbb{R}^n) : Eu|_\Omega = u \text{ f.u.}$$

($E: H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^n)$ Extension Operator, siehe Vorlesung)

$$\text{Sei nun} \quad \tilde{E}u := \min \left\{ \max \{Eu, \|u\|_\infty\} - \|u\|_\infty \right\}$$

d.h.

$$\tilde{E}u = \begin{cases} -\|u\|_\infty & Eu(x) < -\|u\|_\infty \\ Eu(x) & |Eu(x)| \leq \|u\|_\infty \\ \|u\|_\infty & Eu(x) > \|u\|_\infty \end{cases}$$

Beh $\tilde{E}u \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{E}u|_\Omega = u$.

Bew

auf Ω gilt für:

$$|Eu| = |u| \leq \|u\|_\infty \text{ für.}$$

$$\Rightarrow \tilde{E}u = Eu = u. \text{ für.}$$

Dass $\tilde{E}u$ schwach diffbar auf $\mathbb{R}^n$ ist folgt aus der Tatsache, dass das Maximum zweier schwach diffbarer Funktionen wieder schwach diffbar ist

Noch $\nabla \tilde{E}u, \tilde{E}u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Beweis

Beachte $|\tilde{E}u| \leq |Eu| \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\nabla \tilde{E}u = \begin{cases} 0 & Eu(x) < -\|u\|_\infty \\ \nabla E(u) & |Eu(x)| \leq \|u\|_\infty \\ 0 & Eu(x) > \|u\|_\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\nabla \tilde{E}(u)| \leq |\nabla E(u)| \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Nun gilt $\exists (u_m) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap H^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\|u_m\|_{L^\infty} \leq \|\tilde{E}u\|_{L^\infty} \text{ und } u_m \xrightarrow{H^2(\mathbb{R}^n)} \tilde{E}u \text{ wegen Teilfunktoren}$$

$$\Rightarrow u_m|_\Omega \xrightarrow{H^2(\mathbb{R}^n)} \tilde{E}u|_\Omega = u \text{ und } \|u_m\|_{L^\infty} \leq \|\tilde{E}u\|_{L^\infty} = \|u\|_{L^\infty}$$

$$\Rightarrow (u_n|_{\Omega}) \subset C^{\infty}(\bar{\Omega}) \text{ tut's}$$