

Advanced Topics in the Calculus of Variations

Blatt 2

Aufgabe 13

(a)

Es sei $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$. Sei $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Standard Mollifier Folge

~~Setze~~ Beachte $\forall f \in C_0(\mathbb{R}^m)$ gilt

1) $f * \varphi_n \rightarrow f$ punktweise (überall!)

2) $\|f * \varphi_n\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \left| \int f(y) \varphi_n(x-y) dy \right|$

$$\leq \|f\|_\infty \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \underbrace{\int \varphi_n(x-y) dy}_{=1} = \|f\|_\infty$$

Nun setze

$$g_n(x) := \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_n(x-y) d\mu(y), \quad n \in \mathbb{N}$$

Es gilt

1) $g_n \in L^1(\mathbb{R}^m)$ denn

$$\int |g_n(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left| \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_n(x-y) d\mu(y) \right| dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} |\varphi_n(x-y)| d|\mu|(y) dx$$

$$\stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}^m} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^m} \varphi_n(x-y) dx \right)}_{=1} d|\mu|(y)$$

$$= |\mu|(\mathbb{R}^m) < \infty$$

2) Auch gilt für $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ beliebig

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_n(x-y) d\mu(y)}_{=\varphi_n(y-x)} dx$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi_n(y-x) dx \right) d\mu(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{f * \varphi_n}_{\text{fktw}} d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f d\mu$$

und ist majorisiert durch $\|f\|_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ da $|\varphi_n|$ endlich

$\Rightarrow (g_n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$g_n dx \xrightarrow[\mu(\mathbb{R}^n)]{*} \mu.$$

(b) (i) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen

Dann gilt

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left\{ x \mid \text{dist}(x, U^c) \geq \frac{1}{k} \right\}}_{:= A_k} \cap \overline{B_k(0)}$$

$\left\{ \begin{array}{l} (i) A_k \subset A_{k+1} \text{ und} \\ \text{dist}(A_k, U^c) \geq \frac{1}{k} \end{array} \right.$

$$\text{Sei } \varphi_k := \begin{cases} 1 - 2k \cdot \text{dist}(x, A_k) & \text{dist}(x, A_k) \leq \frac{1}{2k} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann $\varphi_k \in C_0(\mathbb{R}^n)$ $0 \leq \varphi_k \leq 1$, $\text{supp } \varphi_k \subset U$ da

$$B_{\frac{1}{2k}}(A_k) \subset U. \quad \text{Auch } \varphi_k|_{A_k} = 1$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} \mu(A_k) &\leq \int \varphi_k \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \underbrace{\varphi_k}_{\leq \varphi_n} \, d\mu_n \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U) \end{aligned}$$

Nun $k \rightarrow \infty$

$$\mu(U) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U).$$

Gegenbeispiel für Glättung

$$\mu_n = g_n \, dx \quad g_n \text{ Diracfolge}$$

$$\text{Dann } \mu_n \xrightarrow[\mu(\mathbb{R}^m)]{x} \delta_0$$

$$\text{Sei } U = \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$$

$$\delta_0(U) = 0 \quad \text{und}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\mathbb{R}^m \setminus \{0\}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\underbrace{\mathbb{R}^m \setminus \{0\}}_{\text{mit } g_n!}} g_n \, dx$$

$$= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} g_n \, dx = 1$$

(ii) Beweis

$K \subset \mathbb{R}^m$ kompakt

Dann $K = \bigcap_{l=1}^{\infty} \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^m \mid \text{dist}(x, K) \leq \frac{1}{2^l}\}}_{= B_l}$.

setze $\varphi_l(x) := \begin{cases} 1 - 2^l \text{dist}(x, K) & \text{dist}(x, K) \leq \frac{1}{2^l} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow \int \varphi_l d\mu_n \leq \mu_n(K)$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int \varphi_l d\mu \leq \mu(B_l)$
 $0 \leq \varphi_l \leq 1, \sup \varphi_l \in B_l$

$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(K) \leq \mu(B_l) \quad \forall l \in \mathbb{N}$

$\xrightarrow{l \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(K) \leq \mu\left(\bigcap_{l=1}^{\infty} B_l\right) = \mu(K).$

Für abgeschlossene Mengen gilt die Aussage nicht

Bsp $m=1$, $\mu_n = \delta_n$ - Diracmaß mit Masse 1 bei n .

$A = \mathbb{R}$ ist abgeschlossen. Nun

$\mu_n \xrightarrow{\text{weak}} 0$ da $\forall f \in C_0(\mathbb{R})$

$\int f d\mu_n = f(n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

Aber $\mu_n(\mathbb{R}^m) = 1 \not\rightarrow \mu(\mathbb{R}^m) = 0$.

(c) Nein, ist sie nicht da wir in Aufgabe ~~13~~ 13 b (ii) gesehen haben

dass $\mu_n = \delta_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ schwach- $*$ gegen das Nullmaß $0 \notin \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ konvergiert,

(d) Ja, ~~seien~~ Sei μ_n eine Folge nichtnegativer Maße mit $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$. Dann gilt für alle $f \in C_0(\mathbb{R}^m)$ mit $f \geq 0$ dass

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_n \geq 0$$

Sei nun $K \subset \mathbb{R}^m$ kompakt. $f_e \geq 0, \|f_e\|_\infty \leq 1$

Dann gibt es $(f_e)_{e=1}^\infty \subset C_0(\mathbb{R}^m)$ mit ~~$f_e \rightarrow \chi_K$~~

und $f_e \rightarrow \chi_K$ punktweise.

(Man kann f_e wählen wie die f_e in Aufgabe 2(b) (ii))

$$\mu(K) = \int \chi_K d\mu \stackrel{\text{DCT}}{=} \lim_{e \rightarrow \infty} \int f_e d\mu \geq 0$$

$\Rightarrow \mu(K) \geq 0 \quad \forall K$ kompakt.

Sei nun A Borel-messbar und beliebig.

Da $|\nu|$ Borel-Maß ist gilt

$$|\nu|(A) = \sup \{ |\nu|(K) \mid K \subset \overset{A}{\mathbb{R}^n} \text{ kompakt} \},$$

Wähle nun $(K_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit $K_n \subset A$
(obda $K_n \subset K_{n+1}$) sodass

$$\infty > |\nu|(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} |\nu|(K_n) = |\nu|\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right)$$

$$\Rightarrow |\nu|(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) = 0$$

$$\nu(A) = \nu(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) + \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right)$$

$$\text{Nun } \left| \nu\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) \right| \leq_{\text{Def von } |\nu|} |\nu|\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) = 0.$$

$$\Rightarrow \nu(A) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right)$$

$$\stackrel{=}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\nu(K_n)}_{\geq 0} \geq 0$$

(e) Beachte

$\mathcal{P}(\mathcal{M}^m)$ ist konvex und abgeschlossen,
aber nicht schwach-* abgeschlossen!

Bew $\mathcal{P}(\mathcal{M}^m)$ konvex ✓

Abgeschlossen: Sei $(\mu_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M}^m)$ mit

$$\mu_n \xrightarrow{\mathcal{M}(\mathcal{M}^m)} \mu \quad \text{d.h.}$$

$$0 \leftarrow \|\mu_n - \mu\|(\mathcal{M}^m) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_n(B_k) - \mu(B_k)| \mid \begin{array}{l} (B_k)_{k=1}^{\infty} \text{ disjunkte} \\ \text{Borelmengen mit } \mathcal{M}^m = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \end{array} \right\}$$

Nun $B_1 = \mathcal{M}^m,$

$$B_2 = B_3 = \dots = \emptyset$$

$$\underbrace{|\mu_n(\mathcal{M}^m) - \mu(\mathcal{M}^m)|}_{=1} \leq \|\mu_n - \mu\|(\mathcal{M}^m) \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \mu(\mathcal{M}^m) = 1$$

1g) $M(\mathbb{R}^m)$ nicht separabel denn

$\forall x, y \in \mathbb{R}^m : x \neq y$ gilt

$$\|\delta_x - \delta_y\| = \|\delta_x - \delta_y\|(\mathbb{R}^m) \stackrel{\text{Def von } \|\cdot\|}{\geq} \|\delta_x - \delta_y\|(\{x\})$$

$$|\delta_x(\{x\}) - \delta_y(\{x\})| + |\delta_x(\{y\}) - \delta_y(\{y\})| \\ + |\delta_x(\mathbb{R}^m \setminus \{x, y\}) - \delta_y(\mathbb{R}^m \setminus \{x, y\})|$$

$$= 2.$$

Angenommen nun, $(\mu_n)_{n=1}^\infty$ ist abzählbare dichte Teilmenge.

Dann $\forall x \in \mathbb{R}^m \exists n_x \in \mathbb{N} : \|\mu_{n_x} - \delta_x\|(\mathbb{R}^m) \leq \frac{1}{2}$

Behauptung $x \neq y \Rightarrow n_x \neq n_y$. Denn $n_x = n_y$

$$\text{folgt: } 2 \leq \|\delta_x - \delta_y\|$$

$$\leq \|\delta_x - \mu_{n_x}\| + \|\mu_{n_x} - \delta_y\|$$

$$= \underbrace{\|\delta_x - \mu_{n_x}\|}_{\leq \frac{1}{2}} + \underbrace{\|\mu_{n_y} - \delta_y\|}_{\leq \frac{1}{2}} \leq 1 \quad \text{!}$$

- $M(\mathbb{R}^m)$ nicht reflexiv, denn wäre es reflexiv
so hätte jede beschränkte Folge eine
schwach konvergente Teilfolge.

~~$$\left\{ \delta_n \right\}_{n=1}^{\infty} \subset M(\mathbb{R}^m)$$~~

Beobachtung

$$\bar{x}^*: M(\mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{x}^*(\mu) := \mu(\mathbb{R}^m)$$

liegt in $M(\mathbb{R}^m)^*$.

Auch $\forall f \in C(\mathbb{R}^m)$

$$\bar{x}_f^*: M(\mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{x}_f^*(\mu) := \int f d\mu$$

liegt in $M(\mathbb{R}^m)^*$

Nun $(\delta_n)_{n=1}^{\infty} \subset M(\mathbb{R}^m)$ beschränkt.

Falls $\exists (l_n)_{n=1}^{\infty}$ sodass $(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ schwach

konvergiert ~~so~~ gegen ein ~~μ~~ $\mu \in M(\mathbb{R}^m)$

so gilt

$$\mu(\mathbb{R}^m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}^*(\delta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(\mathbb{R}^m) = 1$$

$$= \bar{x}^*(\mu)$$

Andererseits gilt aber für $f \in C(\mathbb{R}^m)$

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_f^*(\delta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\delta_n$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \int f dy = 0 \quad \forall f \in C(\mathbb{R}^m)$$

$$\Rightarrow \mu \text{ ist die Nullabbildung in } C_0(\mathbb{R}^m)^{\times}$$

$$\Rightarrow r = 0 \quad \text{in } \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$$

Aber dann

$$1 = \mu(\mathbb{R}^m) = 0, \quad \text{!}$$

Aufgabe 14 a)

$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \delta_x$ ist Young Maß d.h.

$\forall f \in C_0(\mathbb{R}^n) \quad x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(z) d\delta_x(z)$ ist

messbar. Nun

$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(z) d\delta_x(z) = f(x)$ ist

als stetige Abbildung Borel-messbar.

Wdh Ein Generator eines Young Maßes
ist eine Folge $(\gamma_j) \subset L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ beschränkt

sodass

$$\forall \varphi \in L^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} f(\xi_j(x)) \varphi(x) dx \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(z) d\gamma_x(z) \right) \varphi(x) dx$$

Falls $(x \mapsto \gamma_x) \equiv (x \mapsto \delta_x)$ so gilt:

$(\gamma_j)_{j=1}^{\infty} \subset L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ beschränkt ist Generator.

$$\Leftrightarrow \forall \varphi \in L^1(\Omega) \quad \int f(\xi_j(x)) \varphi(x) dx \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int f(x) \varphi(x) dx \quad (*)$$

Zum Beweis des zweiten Satzes

$$\Leftarrow \text{ Sei nun } \int |x|^p dx < \infty$$

Dann gilt $\xi_j(x) := x \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^m) \forall j \in \mathbb{N}$.

und (*) ist wahr für diese Wahl

Von $(\xi_j)_{j=1}^\infty \Rightarrow \xi_j = \text{id}$ ist ein Generator

von $x \mapsto \delta_x$ und beschränkt in $L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

$\Rightarrow$ Sei $(\xi_j) \subset L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$ beschränkt d.h.,
dass ξ_j Generator von $x \mapsto \delta_x$

Theorem 10



Fundamentalsatz

$\exists$ TF $(\xi_{j_k})_{k=1}^\infty$ und ein

Young-Maß $x \mapsto \nu_x$ d.h.

dass $(\xi_{j_k})_{k=1}^\infty(x, \nu_x)$ generiert.

und $x \mapsto \int |z|^p d\nu_x(z) \in L^1(\Omega)$

Da Folgen von Generatoren dasselbe
Young-Maß generieren gilt $\nu_x = \delta_x$

und daher

$$x \mapsto \int |z|^p d\delta_x(z) = |x|^p \in L^1(\Omega)$$

$$\Rightarrow \int_\Omega |x|^p dx < \infty.$$

1b) Wir zeigen die Aussage zunächst für
Kompakta $K \subset \mathbb{R}^m$:

- Für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^m$ gibt es
 $(f_\ell)_{\ell=1}^\infty \subset C_0(\mathbb{R}^m)$ sodass $\|f_\ell\|_\infty \leq 1, 0 \leq f_\ell \leq 1$
und $f_\ell \xrightarrow{\text{ptw}} \chi_K$.

[Aufgabe 13(b) (iii) für eine Konstruktion dieser]

$\Rightarrow$ Nach dem Satz von Lebesgue ist

$x \mapsto \mu_x(K)$ punktw. Limites

von $\left(x \mapsto \underbrace{\int f_\ell dx}_{\text{messbar da } \mu_x \text{ Young Maß}} \right)_{\ell=1}^\infty$.

Da

punktw. Limites messbarer Funktionen

messbar sind folgt die Beh. für $A=K$ komp.

Für Allgemeine Borel-messbare Mengen

Wir zeigen

$\mathcal{D} := \{ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \mid x \mapsto \mu_x(B) \text{ messbar} \}$
ist ein Dynkin-System.

Wenn das gezeigt ist dann ist $\mathcal{D}$

ein Dynkin-System welches die schnittstabile Menge

$$\mathcal{E} := \{K \subset \mathbb{R}^m \mid K \text{ kompakt}\} \text{ enthält}$$

Da bei schnittstabilen Mengensystemen, das erzeugte Dynkin-System und die erzeugte σ -Algebra übereinstimmen gilt

$$\mathcal{D} \supset \underbrace{\sigma(\mathcal{E})}_{\substack{\text{von } \mathcal{E} \text{ erzeugte} \\ \sigma\text{-Algebra}}} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \quad \text{qed}$$

Noch zu zeigen: $\mathcal{D}$ ist Dynkin-System.

(1) $\mathbb{R}^m \in \mathcal{D}$ da

$$(x \mapsto \nu_x(\mathbb{R}^m)) \equiv (x \mapsto 1) \text{ messbar}$$

(2) Sei $A \in \mathcal{D}$ $\hat{=}$ $A^c \in \mathcal{D}$.

Beachte: $\nu_x(A^c) = 1 - \nu_x(A)$

Nun $x \mapsto 1 - \nu_x(A)$ messbar als Summe messbarer Funktionen
 $\Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$

(3) Seien $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ disjunkt,

$$\hat{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mu(A_n)}_{\text{messbar in } X}$$

messbar in X als
Grenzwert messbarer Fkt.

$$\Rightarrow X \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \text{ messbar}$$

$$\Rightarrow X \mapsto \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \text{ messbar.}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{P},$$

(0) Es sei $(z_j)_{j=1}^\infty \subset L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$ Generator von $X \mapsto \chi_X$
 Da $(z_j) \subset L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$ beschränkt gibt
 es nach dem ~~Kor~~ Fundamentalsatz
 (oder nach Prop 11) ein Kompaktum
 $K \subset \mathbb{R}$ sodass $\text{supp}(\chi_X) \subset K$ für fast
 alle $X \in \Omega$

Setze $\tilde{K} := K \cup \overline{B_{\sup_{j \in \mathbb{N}} \|z_j\|_{L^\infty}}}(0)$

und sei $\chi \in C_0(\mathbb{R}^m)$ mit $0 \leq \chi \leq 1$

und $\chi \equiv 1$ auf $\tilde{K}$.

Sei $z_j \xrightarrow[\text{L}^\infty]{*} \bar{z} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Dann gilt für alle $\varphi \in L^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \bar{z}(x) \varphi(x) dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} z_j(x) \varphi(x) dx$$

$$= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \chi(z_j(x)) z_j(x) \varphi(x) dx$$

$z_j(x) \in B_{\sup_{j \in \mathbb{N}} \|z_j\|_{L^\infty}}(0)$
 f.ä. x vj

$$= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \underbrace{(\chi \circ \text{id})}_{\in C_c(\mathbb{R}^m)}(z_j(x)) \varphi(x) dx$$

Def Generator

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\int_{\mathbb{R}^m} (\chi \cdot \text{id})(z) d\nu_x(z) \right) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^m} \chi(z) z d\nu_x(z) \right)}_{=1 \text{ auf supp } \chi} \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} z d\nu_x(z) \end{aligned}$$

$$= \int_{\Omega} \left(\int z d\nu_x(z) \right) \varphi(x) dx$$

HL der

$\Rightarrow$

Variationsrechnung

$$\bar{z}(x) = \int_{\Omega} z d\nu_x(z) \quad \text{f.a. } x \in \Omega$$

$$\Rightarrow \bar{z}(x) = \#[\nu_x]$$

Moralisieren Das Young Maß enthält mehr Informationen als der schwache Grenzwert denn der schwache Grenzwert kann aus dem Young Maß durch Bildung des Erwartungswertes zurück gewonnen werden.

Aufgabe 15

Sei $\varepsilon > 0$.

Wähle $\delta > 0$ so, dass

$$\sqrt{\delta} + \int_{|g| > \frac{1}{\sqrt{\delta}}} |g(x)| dx < \varepsilon.$$

Dann gilt für E mit $|E| < \delta$

$$\int_E |g(x)| dx$$

$$= \int_{E \cap \{|g| > \frac{1}{\sqrt{|E|}}\}} |g(x)| dx + \underbrace{\int_{E \cap \{|g| \leq \frac{1}{\sqrt{|E|}}\}} |g(x)| dx}_{\leq \frac{1}{\sqrt{|E|}} \int_E 1 dx = \sqrt{|E|}}$$

$$\leq \int_{\{|g| > \frac{1}{\sqrt{|E|}}\}} |g(x)| dx + \sqrt{|E|}$$

$$= \int_{\{|g| > \frac{1}{\sqrt{\delta}}\}} |g(x)| dx + \sqrt{\delta} < \varepsilon.$$