

Advanced Topics in the Calculus of Variations

Blatt 3

A17 (a)

$(u_j)_{j=1}^{\infty} \subset L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$ konvergent mit GW

$$u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$$

Beh $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ generiert $(x, \delta u(x))$

Bew Wir zeigen: Jede TF hat eine TF die $x \mapsto \delta u(x)$ generiert. Sei $(u_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ eine TF von $(u_j)_{j=1}^{\infty}$

$\Rightarrow \exists$ TF $(u_{j_k})_{k=1}^{\infty} : u_{j_k} \rightarrow u$ fast überall.

Nun gilt für $f \in C_0(\mathbb{R}^m)$

$$f \circ u_{j_k} \xrightarrow[\text{f.u.}]{L^{\infty}} f \circ u \quad \text{fast überall.}$$

$$\text{und auch } \|f \circ u_{j_k}\|_{L^{\infty}} \leq \|f\|_{\infty}.$$

$$\text{Beh } f \circ u_{j_k} \xrightarrow[L^{\infty}(\Omega)]{*} f \circ u$$

Bew Sei $\varphi \in L^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (f \circ u_{j_k}) \varphi(x) dx &\xrightarrow{\text{DCT}} \int (f \circ u)(x) \varphi(x) dx \\ &\rightarrow (f \circ u) \varphi \text{ p.k.w.f.u.} \\ &\text{und } \varphi \text{ wird majorisiert} \\ &\text{durch } \|f\|_{\infty} |\varphi| \in L^1(\Omega) \end{aligned} = \int \left(\int f(z) d\delta_{u_{j_k}(z)} \right) \varphi(x) dx$$

$\Rightarrow (u_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ generiert $(x, \delta u(x))$.

$$(b) \quad z_j(x) = j^d z(jx), \quad z \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \int_{\mathbb{R}^d} z = 1, \quad z \geq 0$$

Wir zeigen: Jede TF hat eine TF, die δ_0 generiert.

Sei $(z_k)_{k=1}^\infty$ eine TF. Da $(z_k)_{k=1}^\infty \subset L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$

beschränkt, gibt es nach dem Fundamentalsatz

(Thm 10) ein Young-Maß $(x \mapsto \nu_x)$ so,

nach Auswahl einer weiteren TF

$$\text{dass } z_k \xrightarrow{Y} (x \mapsto \nu_x)$$

$$\text{Beh: } \text{supp}(x \mapsto \nu_x) \subset \{0\}$$

Daraus folgt (da $\nu_x \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, dass $\nu_x = \delta_0$)

Wir zeigen hierzu:

$$\textcircled{!} \quad \int_{\mathbb{R}^d} |z| d\nu_x = 0 \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^d$$

Zum Beweis von $\textcircled{!}$

$$\textcircled{1} \quad (x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} |z| d\nu_x) \in L^1(\mathbb{R}^d) \quad \text{Nach Fundamentalsatz}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Sei } \chi_n \uparrow 1, \quad \chi_n \in C_0(\mathbb{R}^d) : 0 \leq \chi_n \leq 1$$

Nach dem Satz über die Monotonie Konvergenz gilt

$$\int \chi_n(z) |z| d\nu_x(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int |z| d\nu_x(z)$$

fast alle $x \in \mathbb{R}^d$

Sei nun $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, $\varphi \geq 0$

Wir zeigen

$$(*) \quad \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \left(\int_{\mathbb{R}} |z| d\gamma_x(z) \right) dx = 0.$$

Daraus folgt mit der Hauptlemma

der Variationsrechnung (welches auch

funktioniert wenn man nur mit $\varphi \geq 0$ testet),

dass

$$\int_{\mathbb{R}} |z| d\gamma_x(z) = 0 \quad \text{f.a. } x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |z| d\gamma_x(z) \neq 0 \quad \text{f.a. } x \in \mathbb{R}^d \Rightarrow \text{☺}$$

Nun zu $(*)$

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}} |z| d\gamma_x(z) dx$$

$$\stackrel{②}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}} |z| \gamma_n(z) d\gamma_x(z) dx$$

$$\stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}} |z| \gamma_n(z) d\gamma_x(z) dx$$

$$\stackrel{\text{Def. } \gamma_{z_j k}}{=} \liminf_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \underbrace{|z_{j_k}(x)|}_{=z_k(x) \text{ da } z_j \geq 0} \underbrace{\gamma_n(z_{j_k}(x))}_{\leq 1} d\gamma_x(z) dx$$

$$\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int \varphi(x) z_{j_k}(x) dx$$

Nun

$$\int \varphi(x) z_{jk}(x) dx \xrightarrow[\text{Folge}]{z_{jk} \text{ Dirac}} \varphi(0) \xrightarrow[\text{Vorf. an } \varphi]{=} 0.$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}} |z| d\gamma_x(z) = 0 \Rightarrow (*)$$

Vie oben
 $\Rightarrow$
 erklärt



Nun $(*)$ impliziert $\text{supp}(\gamma_x) \subset \{0\}$ denn

$$\gamma_x(\overline{B_\delta(0)}^c) \leq \int_{\overline{B_\delta(0)}^c} d\gamma_x \leq \frac{1}{\delta} \underbrace{\int_{\overline{B_\delta(0)}^c} |z| d\gamma_x(z)}_{=0}$$

$$= 0 \Rightarrow \gamma_x\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_{\frac{1}{n}}(0)}^c\right) = 0$$

$$\Rightarrow \gamma_x(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) = 0$$

$$\Rightarrow \text{supp}(\gamma_x) \subset \{0\}.$$

$$\gamma_x \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \xRightarrow{=} \gamma_x = \delta_0 \quad \text{f.a. } x$$

$$\Rightarrow z_{jk} \text{ generiert } \delta_0$$

$$\xRightarrow{\text{Hauersplittung}} z_j \longrightarrow \delta_0$$

A17 c)

$$z_j \xrightarrow{w} v$$

Proposition 11 $K \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossen Dann sind
äquivalent

$$(1) \operatorname{supp}(\mu_x) \subset K \quad \text{f.ä. } x \in \mathbb{R}$$

$$(2) \operatorname{dist}(z_j, K) \rightarrow 0 \quad \text{in } L^1$$

Wähle (z_j) wie in A17(b) und

$$K = \{0\}, \quad z_j \xrightarrow{w} \delta_0$$

$$(1) \operatorname{supp}(\delta_0) = \{0\} \subset K \quad \text{f.ä. } x \in \mathbb{R} \quad \checkmark$$

ABER

$$\int \operatorname{dist}(z_j, K) dx = \int \operatorname{dist}(z_j, 0) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^1} |z_j(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^1} z(jx) dx$$

$$= \int z(y) dy = 1 \not\rightarrow 0.$$

Aufgabe 18

(a) Aus der VL wissen wir dass

$\det: \mathbb{R}^{\text{dxd}} \rightarrow \mathbb{R}$ Rang 1-konvex ist.

$$\text{Nun } \bar{v} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(\bar{v}) = 0$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{v}, \det \rangle &= \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Dann gilt also $\det(\bar{v}) \neq \langle \bar{v}, \det \rangle$

$\Rightarrow \bar{v}$ kein Laminat.

(b) $\mu, \nu \in \mathcal{P}^{\text{rc}}(\mathbb{R}^{\text{dxd}})$, $\text{rk}(\bar{\nu} - \bar{\mu}) \leq 1$

$\stackrel{!}{=} \forall \lambda \in (0, 1) \quad \lambda \bar{\mu} + (1-\lambda) \bar{\nu}$ Laminat.

Bew Sei $f: \mathbb{R}^{\text{dxd}} \rightarrow \mathbb{R}$ Rang-1-konvex.

$$f(\overline{\lambda \bar{\mu} + (1-\lambda) \bar{\nu}}) = f(\lambda \bar{\mu} + (1-\lambda) \bar{\nu})$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{rk}(\bar{\nu} - \bar{\mu}) \leq 1}{\leq} \lambda f(\bar{\mu}) + (1-\lambda) f(\bar{\nu}) \\ &\stackrel{f \text{ rk 1 konvex}}{\leq} \end{aligned}$$

$\mu, \gamma \in \mathcal{P}^c(\mathbb{R}^{n \times d})$

$\leq$

$$\lambda \langle \gamma, f \rangle + (1-\lambda) \langle \gamma, f \rangle$$

Duale Paarung

linear

$$\langle \lambda \mu + (1-\lambda) \gamma, f \rangle$$

$\Rightarrow$ Bew.

Auf die Voraussetzung $\text{rk}(\bar{\mu} - \bar{\gamma}) \leq 1$ kann man

nicht verzichten. Bsp: A_1, A_2 wie in A18(a)

$$\mu = \delta_{A_1}, \quad \gamma = \delta_{A_2} \quad \text{Laminate}$$

aber $\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\gamma$ kein Lamm.

12 1 2 3

Dann gilt

$$\lambda p + (1-\lambda) \mathcal{V} = \sum_{j=1}^{k+l} \tilde{\Theta}_j \delta \tilde{A}_j$$

Zz (Für die Def eines laminates 2. Ordnung)

$$(i) \operatorname{rk}(\tilde{A}_{k+l} - \tilde{A}_{k+l-1}) \leq 1$$

$$(ii) [\tilde{A}_{k+l} \mid \tilde{A}_{k+l-1}] \subset \mathcal{O}$$

(iii) Das Maß

$$\sum_{j=1}^{k+l-2} \tilde{\Theta}_j \delta \tilde{A}_j + (\tilde{\Theta}_{k+l-1} + \tilde{\Theta}_{k+l}) \delta \tilde{A}_{k+l-1}'$$

wobei

$$\tilde{A}_{k+l-1}' := \frac{\tilde{\Theta}_{k+l-1}}{\tilde{\Theta}_{k+l-1} + \tilde{\Theta}_{k+l}} \tilde{A}_{k+l-1} + \frac{\tilde{\Theta}_{k+l}}{\tilde{\Theta}_{k+l-1} + \tilde{\Theta}_{k+l}} \tilde{A}_{k+l}$$

ist ein Laminat der Ordnung $k+l-1$

Bew (i) $\operatorname{rk}(\tilde{A}_{k+l} - \tilde{A}_{k+l-1}) = \operatorname{rk}(B_l - B_{l-1}) \leq 1$

$$(ii) [\tilde{A}_{k+l} \mid \tilde{A}_{k+l-1}] = [B_l \mid B_{l-1}]$$

(iii) Beachte

$$\tilde{A}_{k+l-1} \stackrel{l \geq 2}{=} \frac{(1-\lambda)\eta_{l-1}}{(1-\lambda)\eta_{l-1} + (1-\lambda)\eta_l} B_{l-1} + \frac{(1-\lambda)\eta_l}{(1-\lambda)\eta_{l-1} + (1-\lambda)\eta_l} B_l =$$

$$\frac{\eta_{l-1}}{\eta_{l-1} + \eta_l} B_{l-1} + \frac{\eta_l}{\eta_{l-1} + \eta_l} B_l = B'_{l-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k+l-2} \tilde{\Theta}_j \delta_{\tilde{A}_j} + (\tilde{\Theta}_{k+l-1} + \tilde{\Theta}_{k+l}) \delta_{\tilde{A}_{k+l-1}}$$

$$= \sum_{j=1}^k \lambda \Theta_j \delta_{A_j} + \sum_{j=1}^{l-2} (1-\lambda) \eta_j \delta_{B_j}$$

$$+ (1-\lambda)(\eta_{l-1} + \eta_l) \delta_{B'_{l-1}}$$

$$= \lambda \sum_{j=1}^k \Theta_j \delta_{A_j} + (1-\lambda) \left[\sum_{j=1}^{l-2} \eta_j \delta_{B_j} + (\eta_{l-1} + \eta_l) \delta_{B'_{l-1}} \right]$$

$$= \underbrace{\lambda \bar{p}}_{\text{Ordnung } k} + (1-\lambda) \underbrace{\bar{y}}_{\text{Ordnung } l-1}$$

Summe der Ordnungen $k+l-1$, Außerdem

$$\text{rk}(\bar{p} - \bar{y}) = \text{rk}(\bar{p} - \bar{y}) \leq 1$$

$\Rightarrow$ Nach Induktionshypothese

ist $\lambda p + (1-\lambda)\tilde{x}$

ein Punkt der Ordnung $k+l-1$

$\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ Beh.

A18 d)

Es sei $\nu \in M(\mathbb{R}^{2 \times 2})$ gegeben durch

$$\langle \nu, f \rangle := \int_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^4} f \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} da_{11} da_{12} da_{21} da_{22} \\ \forall f \in C_0(\mathbb{R}^{2 \times 2})$$

[Dies definiert ein eindeutiges Maß $\nu \in M(\mathbb{R}^{2 \times 2})$
da $C_0(\mathbb{R}^{2 \times 2})^* = M(\mathbb{R}^{2 \times 2})$.]

Z $\nu \in \mathcal{P}^{rc}(\mathbb{R}^{2 \times 2})$ und $\nu \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2 \times 2})$

Bew Es sei $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ rang-1-konvex

Z $\langle \nu, f \rangle \geq f(\bar{\nu})$

~~$\bar{\nu} = \int_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^4} z$~~

(?) Muss man sich
eigentlich klar
machen!

$\bar{\nu} = \int_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} z \, d\nu(z)$

$\int_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^4} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} da_{11} da_{12} da_{21} da_{22}$

$= 0.$

Nun

$$\langle r, f \rangle \stackrel{(\circ)}{=} \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^4} f \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} da_{11} da_{12} da_{21} da_{22}$$

$$= \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^3} \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} da_{11} \right] da_{12} da_{21} da_{22}$$

Nun $a_{11} \mapsto f \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist konvex

$$\text{da } f \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = f \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{11} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{rk } 1} \right)$$

und da f rk-1-konvex folgt Beh.

$\Rightarrow$ Mit Jensen gilt

$$\begin{aligned} \langle r, f \rangle &= \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^3} \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} da_{11} \right] da_{12} da_{21} da_{22} \\ &\geq \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^3} f \left(\underbrace{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} da_{11}}_{= 0} \right) da_{12} da_{21} da_{22} \end{aligned}$$

$$= \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^3} f(0) \, da_{21} da_{22} da_{22} = f(0).$$

$$\geq f(\bar{y}).$$

Es fehlt, dass ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist:

$$\nu(\mathbb{R}^{2 \times 2}) = \cancel{\nu(A)} = \langle \nu, 1 \rangle$$

$$= \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^4} da_{11} da_{12} da_{21} da_{22}$$

$$= 1 \Rightarrow \text{Beh.}$$

ν ist kein Lammert endlicher Ordnung, da

$$\nu(\{A\}) = 0 \quad \forall A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

A18(e)

$$\underline{\geq} \quad \text{Rof}(X) = \inf \{ \langle v, f \rangle \mid v \in \mathcal{P}^{\text{rc}}(0) : \bar{v} = X \}.$$

Beweis 1), $\leq$ Sei g Rang-1-konvex : $g \leq f$.

$$\begin{aligned} g(X) &\leq \inf \{ \langle v, g \rangle \mid v \in \mathcal{P}^{\text{rc}}(0) : \bar{v} = X \} \\ &\stackrel{\substack{\text{g Rang-1} \\ \text{konvex}}}{\leq} \inf \{ \langle v, f \rangle \mid v \in \mathcal{P}^{\text{rc}}(0) : \bar{v} = X \} \end{aligned}$$

$\leq \langle v, f \rangle$ da $g \leq f$ und $v \geq 0$

Supremum über alle g

$$\Rightarrow \text{Rof}(X) \leq \inf \{ \langle v, f \rangle \mid v \in \mathcal{P}^{\text{rc}}(0) : \bar{v} = X \}$$

$$\stackrel{\leq}{=} \text{Setze } \tilde{f}(X) := \inf \{ \langle v, f \rangle \mid v \in \mathcal{P}^{\text{rc}}(0) : \bar{v} = X \}.$$

Wir zeigen $\tilde{f} \leq f$, $\tilde{f}$ Rang-1-konvex

$$1) \quad \tilde{f}(\tilde{X}) \leq \langle \delta_{\tilde{X}}, f \rangle = f(\tilde{X}) \quad \forall \tilde{X} \in \mathcal{R}^{\text{ncd}}$$

da $\delta_{\tilde{X}} \in \mathcal{P}^{\text{rc}}(0)$.

$$2) \quad \text{Seien } X, Y \in \mathcal{R}^{\text{ncd}} \quad \text{rk}(X - Y) \leq 1. \text{ Sei } \varepsilon > 0.$$

Wähle $v \in \mathcal{P}^{\text{rc}}(0) : \bar{v} = X$ und $\tilde{f}(X) \leq \langle v, f \rangle \leq \tilde{f}(X) + \varepsilon$
sowie $\mu \in \mathcal{P}^{\text{rc}}(0) : \bar{\mu} = Y$ und $\tilde{f}(Y) \leq \langle \mu, f \rangle \leq \tilde{f}(Y) + \varepsilon$

Dann gilt für alle $\lambda \in (0, 1)$ (da $\overline{\lambda \mu + (1-\lambda)v} = \lambda X + (1-\lambda)Y$ hat)

$$\lambda \mu + (1-\lambda)v \in \mathcal{P}^{\text{rc}}(0) \quad \text{und} \quad \overline{\lambda \mu + (1-\lambda)v} = \lambda X + (1-\lambda)Y$$

Daher;

$$\tilde{f}(hX + (1-h)Y) \leq \langle \cancel{h\tilde{x} + (1-h)\tilde{y}}, f \rangle$$

$$\cancel{\Rightarrow h\tilde{x} + (1-h)\tilde{y}}$$

$$\langle h\tilde{x} + (1-h)\tilde{y}, f \rangle$$

$$\leq h \langle \tilde{x}, f \rangle + (1-h) \langle \tilde{y}, f \rangle$$

$$\leq h(\tilde{f}(X) + \varepsilon) + (1-h)(\tilde{f}(Y) + \varepsilon)$$

$$\leq h\tilde{f}(X) + (1-h)\tilde{f}(Y) + \varepsilon$$

Da ε beliebig war gilt

$$\tilde{f}(hX + (1-h)Y) \leq h\tilde{f}(X) + (1-h)\tilde{f}(Y)$$

$\Rightarrow$ Beh.

$$\Rightarrow \tilde{f}(X) \leq R_0 f(X).$$

$$\Rightarrow \tilde{f} \leq R_0 f$$

$\stackrel{?}{\geq}$ siehe
 $\Rightarrow$
vorher

$$\tilde{f} = R_0 f$$

✓

A191 $\mathbb{R} \geq 0$ offen

$$\Rightarrow O^{\text{rc}} = \bigcup_{\substack{K \subset O \\ \text{kompakt}}} K^{\text{rc}} \text{ offen.}$$

Bew Sei $X \in O^{\text{rc}} \Leftrightarrow \exists r_X > 0 : B_{r_X}(X) \subset O^{\text{rc}}$

Wir wissen $\exists K \subset O$ kompakt sodass $X \in K^{\text{rc}}$.

Da $K \subset O$ kompakt gilt $\text{dist}(K, O^c) > 0$

$\Rightarrow \exists r = r_X > 0 : \overline{B_{r_X}(K)} \subset O$ kompakt.

Behauptung: $Y \in B_{r_X}(0) \Rightarrow X+Y \in O^{\text{rc}}$

Bew der Beh. Sei $Y \in B_{r_X}(0)$. Wir

zeigen $X+Y \in \overline{B_{r_X}(K)}^{\text{rc}}$ womit $X+Y \in O^{\text{rc}}$ folgt.

Sei nun f rang 1-konvex mit

$$f|_{\overline{B_{r_X}(K)}} \leq 0. \Leftrightarrow f(X+Y) \leq 0. \text{ (i)}$$

Bew zu (i) Es gilt $g := f(\cdot + Y)$ ist rang-1-konvex mit $g|_K \leq 0$ (da $K+Y \subset \overline{B_{r_X}(K)}$ und

$f|_{\overline{B_{r_X}(K)}} \leq 0$, Nach der Definition von K^{rc}

gilt $g|_{K^{\text{re}}} \leq 0$, Da $X \in K^{\text{re}}$ ist

gilt $g(X) \leq 0$, und damit hat man

$$f(X+y) = g(X) \leq 0. \Rightarrow \text{Beh.}$$

A20 (a) $A, B: \operatorname{rk}(B-A) = 1$

Setze $g(t) := f(A + t(B-A)) \quad t \in \mathbb{R}$

Nach Def von Rang-1-Konvexität ist

g konvex.

Nun für $\lambda \in (0, 1)$ hat man

$$f(\lambda A + (1-\lambda)B)$$

~~$$= f(B + \lambda(A-B))$$~~

$$= f(A + (1-\lambda)(B-A))$$

$$= g(1-\lambda) = g(\lambda \cdot 0 + (1-\lambda) \cdot 1)$$

$$\leq \lambda g(0) + (1-\lambda)g(1)$$

$$= \lambda f(A) + (1-\lambda)f(B).$$

Aufgabe 21

$$F: W_0^{1,4}(-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F[u] := \int_{-1}^1 ((\partial_x u)^2 - 1)^2 + u^2 dx$$

Wir wissen aus der Vorlesung:

$$\exists (u_j)_{j=1}^\infty \text{ sodass } F[u_j] \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0, = \inf F$$

Sei $(u_j)_{j=1}^\infty$ eine solche Folge.

Es gibt nun eine TF von $(\partial_x u_{j_k}) \subset L^4((-1,1))$
die ein Young-Maß $(x \mapsto \nu_x)$ generiert.

Beh 1 $\text{supp}(\nu_x) \subset \{-1, 1\}$ f.a. $x \in \mathbb{R}$

Bew Sei $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$. Wir zeigen $\text{supp}(\nu_x) \subset \underbrace{[-1-\varepsilon, -1+\varepsilon] \cup [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]}_{=: A_\varepsilon(K)}$
indem wir zeigen

$$\text{dist}(\partial_x u_{j_k}, A_\varepsilon) \xrightarrow{L^4(-1,1)} 0 \quad (k \rightarrow \infty). \quad [\text{Proposition 11}]$$

Beachte $\forall w \in A_\varepsilon^c$ gilt $(w^2 - 1)^2 \geq \frac{(2\varepsilon - \varepsilon^2)^2}{(2\varepsilon - \varepsilon^2)^2} = 1$

Damit:

$$|\{\partial_x u_{j_k} \notin A_\varepsilon\}| \leq |\{(w^2 - 1)^2 \geq (2\varepsilon - \varepsilon^2)^2\}|$$

$$\stackrel{\text{Markov}}{\leq} \frac{1}{(2\varepsilon - \varepsilon^2)^2} \int \left(|\partial_x u_{jk}|^2 - 1 \right)^2 dx$$

$$\leq \frac{1}{(2\varepsilon - \varepsilon^2)^2} F[u_{jk}] \longrightarrow 0.$$

Auch hat man damit

$$\int \text{dist}(\partial_x u_{jk}, A_\varepsilon) = \int_{\partial_x u_{jk} \notin A_\varepsilon^c} \text{dist}(\partial_x u_{jk}, A_\varepsilon)$$

$$\stackrel{\text{Holder}}{\leq} |\{\partial_x u_{jk} \notin A_\varepsilon\}|^{\frac{3}{4}} \left(\int_{-1}^1 \text{dist}(\partial_x u_{jk}, A_\varepsilon)^4 \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\leq \underbrace{|\{\partial_x u_{jk} \notin A_\varepsilon\}|^{\frac{3}{4}}}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ k \rightarrow \infty}} \underbrace{\left(\int_{-1}^1 1 + |\partial_x u_{jk}|^4 \right)^{\frac{1}{4}}}_{\substack{\text{beschränkt da } F \text{ koerativ} \\ \text{in } W_0^{1,4}(-1,1)}}$$

$$\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

$$\Rightarrow \text{dist}(\partial x u_{j_k}, A_\varepsilon) \xrightarrow{L^1(-1,1)} 0$$

$$\Rightarrow \text{supp}(\rho_x) \subset A_\varepsilon \quad \# \text{ fast alle } x \in (-1,1)$$

$$\text{f. beliebig} \quad \text{supp}(\nu_\lambda) \subset \{-1,1\}.$$

$$\Rightarrow \nu_x = \lambda(x) \delta_{-1} + (1-\lambda(x)) \delta_1$$

für eine messbare Funktion $\lambda: (-1,1) \rightarrow [0,1]$
 (Ihre Messbarkeit folgt aus der schwachen
 Messbarkeit von ν_x (Warum?))

Nun $(u_j)_{j=1}^\infty$ ist in $W_0^{1,4}(-1,1)$ beschränkt,

hat daher eine glm konvergente TF.

$$\text{Aber auch } \int u_j^2 \leq F(u_j) \rightarrow 0 \Rightarrow u_j \xrightarrow{L^2} 0.$$

$$\text{Daher: } u_j \xrightarrow{\text{glm}} 0 \text{ auf } (-1,1)$$

Wähle nun $\bar{\chi} \in C_c(\mathbb{R})$ sodass

$$\bar{\chi}|_{(-2,2)} \equiv 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq \bar{\chi} \leq 1 \quad \text{und}$$

Beachte für $a \in (-1,1)$

$$0 \xleftarrow{j \rightarrow \infty} u_j(a) = \int_{-1}^a \partial_x u_j(x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 \underbrace{\chi_{(-1,a)}(x)}_{\in L^2(-1,1)} \partial_x u_j(x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 \chi_{(-1,a)}(x) \partial_x u_j(x) \overline{\chi}(\partial_x u_j(x)) dx \\ + \int_{-1}^1 \chi_{(-1,a)}(x) \partial_x u_j(x) (1 - \overline{\chi})(\partial_x u_j(x)) dx \\ = I_1 + I_2$$

Nun

$$I_1 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int \chi_{(-1,a)}(x) \left(\int_{\mathbb{R}} z \underbrace{\overline{\chi}(z)}_{=1 \text{ auf } \text{supp } \chi_{(-1,1)}} d\gamma_x(z) \right) dx$$

Def Yang Maß $\int_{\mathbb{R}} z \chi(z) d\gamma_x(z)$

$$= \int_{-1}^a \left(\int_{\mathbb{R}} z d\gamma_x(z) \right)$$

~~$\chi_x = \delta_1 + \delta_{-1}$~~

$$\chi_x = \lambda(x) \delta_1 + (1 - \lambda(x)) \delta_{-1} \quad \int_{-1}^a (2\lambda(x) - 1) dx$$

$$|I_2| \leq \int_{\partial u_j \notin [-2,2]} |\partial_x u_{j_k}(x)| dx$$

$$\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \underbrace{|\{\partial_x u_{j_k} \notin [-2,2]\}|}^{\frac{3}{4}} \left(\int_1^2 |\partial_x u_{j_k}|^4 dx \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\leq |\{\partial_x u_{j_k} \notin A_{\frac{1}{4}}\}| \quad \text{da } A_{\frac{1}{4}} \subset [-2,2]$$

$A_{\frac{1}{4}}$ definiert
wie in (*)

$$\leq \underbrace{|\{\partial_x u_{j_k} \notin A_{\frac{1}{4}}\}|}_{\rightarrow 0} \underbrace{\left(\int_1^2 |\partial_x u_{j_k}|^4 dx \right)^{\frac{1}{4}}}_{\text{beschränkt da } \mathcal{F} \text{ kompakt.}}$$

$$\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

$\Rightarrow$

$$\int_{-1}^a (2\chi(x) - 1) dx = 0 \quad \forall a \in (-1, 1)$$

$$\Rightarrow 2\chi(a) - 1 = 0 \quad \text{f.ä. } a \in (-1, 1)$$

$$\Rightarrow \chi(a) \equiv \frac{1}{2} \quad \text{fast überall}$$

$$\Rightarrow \gamma_x = \frac{1}{2} \delta_1 + \frac{1}{2} \delta_{-1}$$