Advanced Topics in the Calculus of Variations Blatt 6

A3 (a)

$\Leftarrow$: Sei Ω beschränktes Lipschitz-Gebiet so, dass Formel (1) auf Blatt 6 gilt. Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$ und $\lambda \in (0,1)$

Z: $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$.

Zwischenbehauptung: (Beweis: später) $\exists\, \Omega_\lambda \subset \Omega$ messbar, sodass $|\Omega_\lambda| = \lambda |\Omega|$. Sei nun $x_0 := \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$.

Wähle nun
$$\varphi(x) := \begin{cases} x_1 - x_0 & \text{auf } \Omega_\lambda \\ x_2 - x_0 & \text{auf } \Omega \setminus \Omega_\lambda \end{cases}$$

Beachte
$$\int_\Omega \varphi(x)\,dx = |\Omega_\lambda|\,(x_1 - x_0) + |\Omega \setminus \Omega_\lambda|\,(x_2 - x_0)$$
$$= |\Omega| \left(\lambda x_1 - \lambda x_0 + (1-\lambda) x_2 - (1-\lambda) x_0 \right)$$
$$= |\Omega| \left(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 - x_0 \right) = 0.$$

Nun gilt
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = f(x_0) \overset{(1)}{\leq} \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(x_0 + \varphi(x))\,dx$$
$$= \frac{|\Omega_\lambda|}{|\Omega|} f(x_1) + \frac{|\Omega \setminus \Omega_\lambda|}{|\Omega|} f(x_2) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$\Rightarrow$ Beh.

Beweis der Zwischenbehauptung

Setze $H_\theta := \{ x \in \mathbb{R}^m \mid x_1 < \theta \}$.

Beh $\mathbb{R} \ni \theta \mapsto |H_\theta \cap \Omega| \in \mathbb{R}$ ist stetig

Dann folgt mit dem Zwischenwertsatz $\exists\, \theta \in \mathbb{R}$: $|H_\theta \cap \Omega| = \lambda |\Omega|$

Setzt man dann $\Omega_\lambda := H_\theta \cap \Omega$ so ist die Zw.Beh. gezeigt.

Nach Z: Die eben erklärte Abbildung ist stetig

Schritt 1 $\theta \mapsto |H_\theta \cap \Omega|$ ist monoton

$\Rightarrow \forall\, \theta_0 \in \mathbb{R}\ \exists\ \lim_{\theta \to \theta_0^+} |H_\theta \cap \Omega|$, $\lim_{\theta \to \theta_0^-} |H_\theta \cap \Omega|$

Schritt 2 Gleichheit der linksseitigen / rechtsseitigen GW

(A) $\lim_{\theta \to \theta_0^+} |H_\theta \cap \Omega| = \lim_{n\to\infty} |H_{\theta_0 + \frac{1}{n}} \cap \Omega|$

$= \left|\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} H_{\theta_0 + \frac{1}{n}}\right) \cap \Omega\right| = |\{x_1 \leq \theta_0\} \cap \Omega|$

(B) $\lim_{\theta \to \theta_0^-} |H_\theta \cap \Omega| = \lim_{n\to\infty} |H_{\theta_0 - \frac{1}{n}} \cap \Omega|$

$= \left|\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} H_{\theta_0 - \frac{1}{n}}\right) \cap \Omega\right| = |\{x_1 < \theta_0\} \cap \Omega|$

z.z. (A) = (B)

$(A) = |\{x_1 \leq \theta_0\} \cap \Omega| = |\{x_1 < \theta_0\} \cap \Omega|$

$+ |\{x_1 = \theta_0\} \cap \Omega| = (B) + \underbrace{|\{x_1 = \theta_0\} \cap \Omega|}_{= 0 \text{ da Teilmenge der Nullmenge } \{x_1 = \theta_0\}}$

$= (B)$ ✓

"$\Longleftarrow$" Es sei $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ konvex, $\varphi \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^m) : \int_\Omega \varphi(x)\, dx = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(x_0 + \varphi(x))\, dx \underset{\text{Jensen Ungl.}}{\geq} f\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega (x_0 + \varphi(x))\, dx\right)$

$= f\left(x_0 + \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \varphi(x)\, dx\right) = f(x_0)$ qed.

A34 b) Sei $\varphi \in L^\infty(\Omega) : \int_\Omega \varphi(x)\,dx = 0$.

$$\text{Z}\quad \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x_0+\varphi(x))\,dx \geq f(x_0).$$

Sei $K \subset\subset \Omega$ kompakt, $\varepsilon_0 > 0$ so, dass $\overline{B_{\varepsilon_0}(K)} \subset \Omega$.

Sei $(\theta_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ der Standardmollifier mit $\operatorname{supp}\theta_\varepsilon \subset \overline{B_\varepsilon(0)}$ $(\varepsilon < \varepsilon_0)$.

Wähle $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\int \eta(x)\,dx = 1$ und setze für $\varphi \in L^\infty(\Omega)$

$$\varphi_\varepsilon(x) := (\varphi \cdot 1_K) * \theta_\varepsilon - \eta \int_\Omega ((\varphi 1_K) * \theta_\varepsilon)(y)\,dy$$

Für $\varepsilon < \varepsilon_0$ gilt $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$. Außerdem gilt

$$\varphi_\varepsilon = \underbrace{\varphi 1_K * \theta_\varepsilon} - \underbrace{\eta \int_\Omega (\varphi 1_K) * \theta_\varepsilon \,dy}$$

$$\xrightarrow{L^2(\Omega)} \varphi 1_K \qquad \xrightarrow[\text{glm.}]{} \eta \int_\Omega \varphi 1_K$$

Zusätzlich gilt wegen den Eigenschaften des Standard-Mollifiers

$$\begin{aligned}
\|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty} &\leq \|\varphi 1_K * \theta_\varepsilon\|_{L^\infty} + \|\eta\|_{L^\infty} \|\varphi 1_K * \theta_\varepsilon\|_{L^1} \\
&\leq \|\varphi 1_K\|_{L^\infty} + \|\eta\|_{L^\infty} \|\varphi 1_K * \theta_\varepsilon\|_{L^\infty} |\Omega| \\
&\leq \|\varphi 1_K\|_{L^\infty} (1 + \|\eta\|_{L^\infty} |\Omega|) \\
&\leq \|\varphi\|_{L^\infty} (1 + \|\eta\|_{L^\infty} |\Omega|) =: R.
\end{aligned}$$

Entlang einer Teilfolge gilt nun wegen

(A) $\varphi_\varepsilon \xrightarrow{\text{f.ü.}} \varphi 1_K - \eta \int_\Omega \varphi 1_K$

(B) $\forall x \in \Omega \quad |f(x_0 + \varphi_\varepsilon(x))| \leq \sup_{y \in B_{|x_0|+R}(0)} |f(y)| < \infty$,

da f stetig

Nun gilt wegen Formel (2) auf Blatt 6

$$f(x_0) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(x_0 + \varphi_\varepsilon(x))\,dx$$

Für $\varepsilon \to 0$ folgt aus $(\overline{A})$, $(\overline{B})$ und dem Satz über die majorisierte Konvergenz

$$f(x_0) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f\left(x_0 + \varphi(x) 1_K(x) + \eta(x) \int_K \varphi(y)\, dy\right) dx \quad (*)$$

Nun war $K \subset\subset \Omega$ beliebig:

Wähle $(K_n)_{n=1}^\infty$ Teilmengen von Ω mit $\bigcup_{n=1}^\infty K_n = \Omega$.

Dann gilt

$$\varphi(x) 1_{K_n}(x) + \eta(x) \int_{K_n} \varphi(y)\, dy \xrightarrow[n\to\infty]{\text{pktw}} \varphi(x),$$

da $\int_\Omega \varphi(y)\, dy = 0$.

Wir benötigen dazu noch eine integrierbare Majorante von $f(x_0 + (\varphi 1_{K_n} + \eta \int_{K_n} \varphi(y)\, dy))$. Beachte hierzu

$$\left| f\left(x_0 + \varphi(x) 1_{K_n}(x) + \eta(x) \int_{K_n} \varphi(y)\, dy\right)\right|$$

$$\leq \sup_{z \in B_{|x_0| + \|\varphi\|_{L^\infty}(1 + |\Omega| \|\eta\|_{L^\infty})}} |f(z)| = C < \infty$$

Die Konstante Funktion C ist integrierbar $\overset{\text{auf } \Omega}{}$ und daher folgt mit majorisierter Konvergenz aus $(*)$

$$\Rightarrow f(x_0) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(x_0 + \varphi(x))\, dx$$

A34 c) Sei Ω wie in der Aussage

$\Rightarrow \exists x_0 \in \Omega, \varepsilon > 0 : \overline{B_\varepsilon(x_0)} \subset \Omega$. Sei nun $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\tilde{\Omega}; \mathbb{R}^m)$

$= W_0^{1,\infty}(B_1(0), \mathbb{R}^m)$. Dann gilt

$$\varphi_{\varepsilon, x_0}(x) := \varepsilon \varphi\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right) \in W_0^{1,\infty}(B_\varepsilon(x_0); \mathbb{R}^m).$$

Setze für $x \in \Omega$

$$\overline{\varphi}(x) := \begin{cases} \varepsilon \varphi\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right) & x \in B_\varepsilon(x_0) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beh $\overline{\varphi} \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Dafür genügt es zu zeigen dass $\overline{\varphi} \in \mathrm{Lip}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ und $\overline{\varphi}|_{\partial\Omega} = 0$.

Letzteres ist klar. Nun gilt

1) $\exists L > 0 \quad |\overline{\varphi}(x) - \overline{\varphi}(y)| \le L|x-y| \quad \forall x, y \in B_\varepsilon(x_0)$. (☺)

Wir müssen noch zeigen dass eine solche Abschätzung auch für $x, y \in \Omega$ gilt. Sei nun $x \notin B_\varepsilon(x_0)$, $y \in B_\varepsilon(x_0)$

Dann gilt $|\overline{\varphi}(x) - \overline{\varphi}(y)| = |\overline{\varphi}(y)| = \inf_{z \in \overline{B_\varepsilon(x_0)}^c} |\overline{\varphi}(y) - \overline{\varphi}(z)|$

$\le \inf_{z \in \partial B_\varepsilon(x_0)} |\overline{\varphi}(y) - \overline{\varphi}(z)|$. Da $\overline{\varphi}$ stetig bis zum Rand ist gilt (☺) auch für $x, y \in \overline{B_\varepsilon(x_0)}$

$\Rightarrow |\overline{\varphi}(x) - \overline{\varphi}(y)| \le L \inf_{z \in \partial B_\varepsilon(x_0)} |y - z| \le L \,\mathrm{dist}(y, \partial B_\varepsilon(x_0))$

$\le L \,\mathrm{dist}(y, B_\varepsilon(x_0)^c) \le L|y - x|$

Falls $x, y \notin B_\varepsilon(x_0)$ stimmt die Ungleichung trivialerweise

Beachte

$$D\overline{\varphi}(x) = D\varphi\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right) \qquad \forall x \in B_\varepsilon(x_0)$$

$$D\overline{\varphi}(x) = 0 \qquad \forall x \notin B_\varepsilon(x_0)$$

$$\frac{1}{|B_1(0)|}\int_{B_1(0)} f(A+D\varphi(x))\,dx$$

$$\underset{y=x_0+\varepsilon x}{\overset{\text{Subst}}{=\!=}} \frac{1}{|B_1(0)|}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{B_\varepsilon(x_0)} f\left(A+D\varphi\left(\frac{y-x_0}{\varepsilon}\right)\right)dy$$

$$= \frac{1}{|B_\varepsilon(x_0)|}\int_{B_\varepsilon(x_0)} f(A+D\bar\varphi(y))\,dy$$

$$= \frac{1}{|B_\varepsilon(x_0)|}\left(\int_\Omega f(A+D\bar\varphi(y))\,dy - \int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x_0)} f(A)\,dy\right)$$

$$= \frac{1}{|B_\varepsilon(x_0)|}\left(\int_\Omega f(A+D\bar\varphi(y))\,dy - |\Omega\setminus B_\varepsilon(x_0)|\, f(A)\right)$$

$$\overset{\text{Formel (3)}}{\geq} \frac{1}{|B_\varepsilon(x_0)|}\left(f(A)\,|\Omega| - |\Omega\setminus B_\varepsilon(x_0)|\, f(A)\right) = \frac{|B_\varepsilon(x_0)|}{|B_\varepsilon(x_0)|} f(A)$$

$$= f(A).$$

A34d) $f:\mathbb{R}^{m\times d}\to\mathbb{R}$ quasikonvex, $\varepsilon>0$

z.z. $f*\varphi_\varepsilon$ quasikonvex. Wähle $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ beliebig, Lipschitz Gebiet.

Sei $\varphi\in W_0^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^m)$

$$\int_\Omega (f*\varphi_\varepsilon)(A+D\varphi(x))\,dx$$

$$= \int_\Omega \left[\int_{B_\varepsilon(0)} f(A+D\varphi(x)-y)\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy\right]dx$$

$$= \int_\Omega\int_{B_\varepsilon(0)} f((A-y)+D\varphi(x))\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy\,dx$$

$$\underset{D\varphi\in L^\infty}{\overset{\text{Fubini}}{=\!=}} \int_{B_\varepsilon(0)}\left[\int_\Omega f((A-y)+D\varphi(x))\,dx\right]\varphi_\varepsilon(y)\,dy$$

$$\geq \int_{B_\varepsilon(0)} f(A-y)\,\varphi_\varepsilon(y)\,dy = (f * \varphi_\varepsilon)(A).$$

A34e) Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\int_\Omega \det(A + D\varphi(x))\,dx = \int_\Omega \det(D(Ax + \varphi(x)))\,dx$$

$$= \int_\Omega \det(Du(x))\,dx, \quad \text{wobei } u(x) := Ax + \varphi(x) \quad (x \in \Omega).$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \det(A + D\varphi(x))\,dx = \int_\Omega \left(\partial_1 u^1 \partial_2 u^2 - \partial_2 u^1 \partial_1 u^2\right) dx$$

$$= \int_\Omega \left[\partial_1(u^1 \partial_2 u^2) - u^1 \partial_1 \partial_2 u^2 - \partial_2 u^1 \partial_1 u^2\right] dx$$

$$= \int_\Omega \left[\partial_1(u^1 \partial_2 u^2) - \partial_2(u^1 \partial_1 u^2)\right] dx$$

$$\overset{\nu \text{ Normale}}{=\!=} \int_{\partial\Omega} \left(u^1 \partial_2 u^2 \nu^1 - u^1 \partial_1 u^2 \nu^2\right) dS(x)$$

$$\overset{u|_{\partial\Omega} = Ax}{=\!=} \int_{\partial\Omega} \left[(Ax)^1 \partial_2 (Ax)^2 \nu^1 - (Ax)^1 \partial_1 (Ax)^2 \nu^2\right] dS(x)$$

$$= \int_\Omega \left(\partial_1 \left[(Ax)^1 \partial_2 (Ax)^2\right] - \partial_2 \left[(Ax)^1 \partial_1 (Ax)^2\right]\right) dx$$

$$= \int_\Omega \partial_1 (Ax)^1 \partial_2 (Ax)^2 - \partial_2 (Ax)^1 \partial_1 (Ax)^2$$

$$= \int_\Omega \det(D(Ax))\,dx = \int_\Omega \det A\,dx = (\det A)|\Omega|$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \det(A + D\varphi(x))\,dx = \det A.$$

$\Longrightarrow$ det quasikonvex

[Beachte: Da „=" gilt ist $(-\det)$ auch quasikonvex!

A35] Siehe A32

A36(a)

$$(S) \quad \begin{cases} \Delta u^1 = 0 \\ \Delta u^2 = 0 \end{cases} \quad , u = (u^1, u^2) \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^2)$$

$$\Delta u = \operatorname{div}(Du) = \operatorname{div}(Df(Du)) \quad \text{falls}$$

$$Df = \mathrm{id} : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}, \text{ d.h. } f(X) = \tfrac{1}{2}|X|^2$$

Aus der Vorlesung wissen wir (vor T_4-Konfigurationen)

Für $J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt

$$\operatorname{div}(Df(Du)) = 0$$

$$\iff \operatorname{curl}(Df(Du)\cdot J) = 0$$

$$\Longleftarrow Df(Du)J = D\tilde{u} \quad (\ast\ast)$$

Nun gilt $(\ast\ast) \iff w = \begin{pmatrix} u \\ \tilde{u} \end{pmatrix}$ löst

$$Dw \in \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Df(X)J \end{pmatrix} \,\middle|\, X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \right\} \subset \mathbb{R}^{4\times 2}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} X \\ XJ \end{pmatrix} \,\middle|\, X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \right\}.$$

(b) Sei nun $w \in W^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^4)$ Lösung von

$$Dw = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ XJ \end{pmatrix} \,\middle|\, X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \right\} \quad (\ast)$$

z.z. $u = (w^1, w^2)$ löst

$$\int_\Omega Du : D\varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^2)$$

[Schwache Lösung von (S)]

Setze $\tilde{u} = (w^3, w^4)$

$\Longrightarrow D\tilde{u} = Du\, J$ laut $(*)$. Sei nun $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$

$$\int_\Omega Du : D\varphi \, dx = \int_\Omega (D\tilde{u}\, J^{-1} : D\varphi)\, dx \underset{J^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{=\!=\!=} \int_\Omega D\tilde{u} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : D\varphi \, dx$$

$$= \int_\Omega \begin{pmatrix} \partial_1 \tilde{u}^1 & \partial_2 \tilde{u}^1 \\ \partial_1 \tilde{u}^2 & \partial_2 \tilde{u}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi^1 & \partial_2 \varphi^1 \\ \partial_1 \varphi^2 & \partial_2 \varphi^2 \end{pmatrix} dx$$

$$= \int_\Omega \begin{pmatrix} \partial_2 \hat{u}^1 & -\partial_1 \hat{u}^1 \\ \partial_2 \hat{u}^2 & -\partial_1 \hat{u}^2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi^1 & \partial_2 \varphi^1 \\ \partial_1 \varphi^2 & \partial_2 \varphi^2 \end{pmatrix} dx$$

$$= \int_\Omega \left[\partial_2 \hat{u}^1 \partial_1 \varphi^1 - \partial_1 \hat{u}^1 \partial_2 \varphi^1 + \partial_2 \hat{u}^2 \partial_1 \varphi^2 - \partial_1 \hat{u}^2 \partial_2 \varphi^2 \right] dx$$

$$\overset{(PI)}{=} -\int_\Omega \hat{u}^1 \partial_2 \partial_1 \varphi^1 + \int \tilde{u}^1 \partial_1 \partial_2 \varphi^1 - \int \tilde{u}^2 \partial_2 \partial_1 \varphi^2$$

$$+ \int \tilde{u}^2 \partial_1 \partial_2 \varphi^2 = 0 \quad (\text{Satz von Schwarz, } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)!)$$

Dass nur die ersten beiden Komponenten genommen werden müssen sieht man durch $(\hat{\ast\ast})$.

A37

(a) $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$

Setze $P_1 := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ k_1 = 2$

Dann gilt

$A_1 = P_1 + k_1 C_1, \quad P_2 := P_1 + C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Wähle nun $C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $k_2 = 2$

Dann gilt $A_2 = P_2 + k_2 C_2$ und

$P_3 := P_2 + C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Wähle $C_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $k_2 = 2$.

Dann gilt

$A_3 = P_3 + k_3 C_3$ und $P_4 := P_3 + C_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Nun gilt für die Wahl von $C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $k_4 = 2$, dass

$A_4 = P_4 + k_4 C_4.$

Noch z.z. $\sum_{i=1}^{4} C_i = 0, \quad rk(C_i) = 1 \ \forall i = 1,2,3,4.$

$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 0$

und $rk(C_i) = 1$ ist offensichtlich

$\Longrightarrow \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ sind in T_4-Konfiguration.

Nach Lemma 32 gilt dann

$$P_1, P_2, P_3, P_4 \in \{A_1, A_2, A_3, A_4\}^{rc}$$

$$\Longrightarrow \{A_1, A_2, A_3, A_4\}^{rc} - \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$$

$$\supset \{P_1, P_2, P_3, P_4\}.$$

A37 b)

Die Rechnung geht Analog zu Aufgabenteil (a)

wenn man nimmt

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad k_1 = 2,\quad C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad k_2 = 2,\quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad k_3 = 2,\quad C_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad k_4 = 2,\quad C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wieder mit Lemma 3.2 gilt

$$\{M_1, M_2, M_3, M_4\}^{rc} \setminus \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$$

$$\supset \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$$

A38) Siehe [redacted] A33