

A43 Beachte

$$H_0^2(\Omega) \xrightarrow{C^{pt}} L^{p+2}(\Omega) \quad \forall p \in [1, \frac{n+2}{n-2}),$$

Ca) Sei $u_k \in N$:

$$\int |\nabla u_k|^2 dx \rightarrow S(p, \Omega), \quad (*)$$

Nun gilt $(u_k)_{k=1}^\infty \subset H_0^2(\Omega)$ beschränkt da

$$\|u_k\|_{H_0^2} = \left(\int |\nabla u_k|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow S(p, \Omega)$$

$\Rightarrow$ Nach Auswahl einer Teilfolge gilt

$$(i) \quad u_k \xrightarrow{H_0^2(\Omega)} u \quad \text{für ein } u \in H_0^2(\Omega)$$

$$(ii) \quad u_k \xrightarrow{L^{p+2}(\Omega)} u$$

Wegen (ii) gilt $u \in N$ da

$$\|u\|_{p+2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_{p+2} = 1$$

$$\Rightarrow u \in N$$

$$\Rightarrow S(p, \Omega) \leq \int |\nabla u|^2 dx = \|u\|_{H_0^2(\Omega)}^2$$

$$\stackrel{\text{Unterabschätzung}}{\leq} \liminf_{\substack{\text{über} \\ \text{der } N \text{ von } k \rightarrow \infty}} \int |\nabla u_k|^2 dx = S(p, \Omega) \quad (\text{siehe } (*))$$

$$\Rightarrow \int |\nabla u|^2 dx = S(p, \Omega)$$

$\Rightarrow S(p, \Omega)$ wird angenommen.

(b) (c) Euler-Lagrange - Gleichung?

Problem N ist kein Vektorraum, daher ist

$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{E}(u+tv)$ nicht zwingend 0 da $u+tv$

nicht zwingend v in N liegt.

Idea Es sei $u \in H_0^1(\Omega) \cap N$ ein Minimierer.

Dann gilt $\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{u+tv}{\|u+tv\|_{L^{p+2}}} \in N$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{E} \left(\frac{u+tv}{\|u+tv\|_{L^{p+2}}} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{1}{\left(\int |u+tv|^{p+2} dx \right)^{\frac{2}{p+2}}} \int |\nabla(u+tv)|^2 dx \\ &= \frac{2 \int \nabla u \nabla v}{\underbrace{\left(\int |u|^{p+2} dx \right)^{\frac{2}{p+2}}}_{=1}} - \frac{2}{p+1} \frac{\int |\nabla u|^2 dx}{\left(\int |u|^{p+2} dx \right)^{\frac{2}{p+2}+1}} \cdot \int |u|^{p-2} u v \quad \begin{matrix} = S(p, \Omega) \\ \end{matrix} \\ &= 2 \int \nabla u \nabla v - 2 \left(\int |u|^{p-2} u v \right) S(p, \Omega) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \nabla u \nabla v = S(p, \Omega) \int |u|^{p-2} u v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Rightarrow -\Delta u - S(p, \Omega) |u|^{p-2} u = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -S(p, \Omega).$$

Aufgabe 44

$$f(z) \geq C|z|^{\alpha}$$

$$\mathcal{E}: \mathcal{P}_{\text{sym}}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{E}(\mu) := \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) d\mu(x) d\mu(y)$$

$$\text{Es sei } I := \inf_{\mu \in \mathcal{P}_{\text{sym}}(\mathbb{R}^n)} \mathcal{E}(\mu) \quad \text{und} \quad (\tilde{\mu}_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}_{\text{sym}}(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{so dass } \mathcal{E}(\tilde{\mu}_k) \longrightarrow I.$$

Beachte: $I \leq f(0)$ da $I \leq \mathcal{E}(\delta_0) = f(0-0) = f(0)$.

Nun $\forall k \in \mathbb{N} \exists w_k \in \mathbb{R}^n : \tilde{\mu}_k(B - w_k) = \tilde{\mu}_k(-B - w_k)$

Setze nun $\mu_k(B) := \tilde{\mu}_k(B - w_k) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$

Dann gilt $\mu_k(B) = \mu_k(-B) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$

Auch gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mu_k) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) d\mu_k(x) d\mu_k(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) d\tilde{\mu}_k(\cdot - w_k)(x) d\tilde{\mu}_k(\cdot - w_k)(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-w_k) - (y-w_k) d\tilde{\mu}_k(x) d\tilde{\mu}_k(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) d\tilde{\mu}_k^{\sim}(x) d\tilde{\mu}_k^{\sim}(y) = \mathcal{E}(\tilde{\mu}_k^{\sim}) \longrightarrow I \end{aligned}$$

$\Rightarrow (\mu_k)_{k=1}^{\infty}$ ist eine Minimalfolge,

Wir wenden das Concentration - Compactness - Lemma 4

auf $(\mu_k)_{k=1}^\infty$ an. (Näher)

Fall 3 Dichotomie

$\exists \lambda \in (0, 1) : \forall \varepsilon > 0 \exists R > 0 : \exists (x_k)_{k=2}^\infty : \forall R' > R \exists \mu_k^{(1)}, \mu_k^{(2)}$

Borelmaße sodass $0 \leq \mu_k^{(1)} + \mu_k^{(2)} \leq \mu_k$, $\mu_k^{(1)}|_{B_R(x_k)} = 0$, $\mu_k^{(2)}|_{B_{R'}(x_k)} = 0$

und $\limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\left| \lambda - \int_{\mathbb{R}^n} d\mu_k^{(1)} \right| + \left| (1-\lambda) - \int_{\mathbb{R}^n} d\mu_k^{(2)} \right| \right) < \varepsilon$.

Dann gilt für ε , R' wie oben gewählt

$$I + o(1) = E(\mu_k) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) d\mu_k(x) d\mu_k(y)$$

$$\stackrel{f \geq 0}{\geq} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) d(\mu_k^{(1)} + \mu_k^{(2)})(x) d(\mu_k^{(1)} + \mu_k^{(2)})(y)$$

$$\stackrel{f \geq 0}{\geq} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) d\mu_k^{(1)}(x) d\mu_k^{(2)}(y)$$

$$= \int_{B_{R'}(x_k)^c} \int_{B_R(x_k)} f(x-y) d\mu_k^{(1)}(x) d\mu_k^{(2)}(y)$$

$$\geq C|x_0|^\alpha \geq C||y|-k|^\alpha \geq C(R'-R)^\alpha$$

$$\geq C(R'-R)^\alpha \mu_k^{(2)}(B_{R'}(x_k))^C / \mu_k^{(1)}(B_R(x_k))$$

$$\stackrel{\text{Support}}{=} \frac{\mu_k^{(2)}}{\mu_k^{(1)}} \geq C(R'-R)^\alpha \mu_k^{(1)}(\mathbb{R}^n) \mu_k^{(2)}(\mathbb{R}^n)$$

$$\geq C(R'-R)^\alpha (1-\varepsilon)(1-\lambda-\varepsilon) + o(1)$$

Lassen wir nun $k \rightarrow \infty$ gehen und wählen $\varepsilon = \min\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{1-\lambda}{2}\right)$

so erhalten wir

$$I \geq C(R'-R)^\alpha \min\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{1-\lambda}{2}\right).$$

Da R' ein frei wählbarer Parameter ist, kann man so

gewählt werden, dass die Ungleichung verletzt ist
 $\Rightarrow$ Fall 3, 'Dichotomie' tritt nicht auf!!

Zu Fall 2: 'Verschwinden'.

Angenommen $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{B_R(x)} d\mu_k \right) \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} 0 \quad \forall R > 0$

Setze $R_k := \sup \{ R > 0 : \mu_k(B_R(0)) \leq \frac{1}{2} \}$. Dann gilt

$$\mu_k(B_{R_k}(0)) = \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\mu_k(B_{R_k - \frac{1}{m}}(0))}_{\leq \frac{1}{2} \text{ (Monotonie des Ma\ss es)}} \leq \frac{1}{2}$$

und

$$\mu_k(\overline{B_{R_k}(0)}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\mu_k(B_{R_k + \frac{1}{m}}(0))}_{\geq \frac{1}{2} \text{ denn andernfalls w\u00fcrde } R_k + \frac{1}{m} \text{ an der Supremumbildung teilnehmen.}} \geq \frac{1}{2}$$

Beachte $R_k \rightarrow \infty$ f\u00fcr $k \rightarrow \infty$ denn falls es eine Teilfolge $(R_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ gibt und $C > 0$ mit $|R_{k_j}| \leq C \quad \forall j \in \mathbb{N}$

so gilt

$$\frac{1}{2} \leq \int_{B_{R_k + 1}(0)} d\mu_k \leq \int_{B_{C+1}(0)} d\mu_k \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{B_{C+1}(x)} d\mu_k \right) \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} 0,$$

ein Widerspruch.

Fall 2.1 Angenommen $\mu_k(\partial B_{R_k}(0)) \leq \frac{1}{4}$ f\u00fcr \u00e4hnlich viele k .

Dann gilt f\u00fcr diese k $\mu_k(\overline{B_{R_k}(0)}^c) \geq \frac{1}{4}$ da $\mu_k(\mathbb{R}^n) = 1$

Schreibe!

$$\overline{B_{R_k}(0)}^c = \left(\overline{B_{R_k}(0)}^c \cap \left\{ |x_1| \leq \frac{R_k}{\sqrt{n}} \right\} \right) \cup \left(\overline{B_{R_k}(0)}^c \cap \left\{ x_1 \geq \frac{R_k}{\sqrt{n}} \right\} \right) \\ \cup \left(\overline{B_{R_k}(0)}^c \cap \left\{ x_1 \leq -\frac{R_k}{\sqrt{n}} \right\} \right)$$

$$= \left(\overline{B_{R_k}(0)}^c \cap \left\{ |x_1|, |x_2| \leq \frac{R_k}{\sqrt{n}} \right\} \right) \\ \cup \left(\overline{B_{R_k}(0)}^c \cap \left\{ |x_1| \leq \frac{R_k}{\sqrt{n}}, x_2 \geq \frac{R_k}{\sqrt{n}} \right\} \right) \\ \cup \left(\overline{B_{R_k}(0)}^c \cap \left\{ |x_1| \leq \frac{R_k}{\sqrt{n}}, x_2 \leq -\frac{R_k}{\sqrt{n}} \right\} \right)$$

Iteration:

$$\overline{B_{R_k}(0)}^c = \overline{B_{R_k}(0)}^c \cap \left\{ |x_1|, \dots, |x_n| < \frac{R_k}{\sqrt{n}} \right\}$$

$$\cup \bigcup_{j=1}^n A_2^+(k) \cup A_2^-(k)$$

Wobei $A_2^+(k) := \overline{B_{R_k}(0)}^c \cap \left\{ |x_1|, \dots, |x_{j-1}| < \frac{R_k}{\sqrt{n}}, x_j \geq \frac{R_k}{\sqrt{n}} \right\}$

$$A_2^-(k) := \overline{B_{R_k}(0)}^c \cap \left\{ |x_1|, \dots, |x_{j-1}| < \frac{R_k}{\sqrt{n}}, x_j \leq -\frac{R_k}{\sqrt{n}} \right\}$$

Beachte $\forall j=1, \dots, n \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad A_j^+(k) = -A_j^-(k).$

Außerdem

$$\overline{B_{R_k}(0)}^c \cap \left\{ |x_1|, \dots, |x_n| < \frac{R_k}{\sqrt{n}} \right\} = \emptyset \quad \text{denn}$$

$$|x_1|, \dots, |x_n| < \frac{R_k}{\sqrt{n}} \Rightarrow x_1^2 + \dots + x_n^2 < n \frac{R_k^2}{n} = R_k^2 \Rightarrow x \in B_{R_k}(0)$$

$$\Rightarrow \overline{B_{R_k}(0)}^c = \bigcup_{j=1}^n A_2^+(k) \cup A_2^-(k)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \mu_K(\overline{B_{R_K}(0)})^c = \sum_{\alpha=1}^n \mu_K(A_{\alpha}^{+}(k)) + \mu_K(A_{\alpha}^{-}(k))$$

$$\frac{\mu_K(A_{\alpha}^{+}) = \mu_K(A_{\alpha}^{-})}{\text{da } \mu_K \text{ symmetrisch}} \geq 2 \sum_{\alpha=1}^n \mu_K(A_{\alpha}^{+}(k))$$

$$\Rightarrow \exists \alpha_k \in \{1, \dots, n\} : \mu_K(A_{\alpha_k}^{+}(k)) [= \mu_K(A_{\alpha_k}^{-}(k))] \geq \frac{1}{8n}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(\mu_K) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) d\mu_K(x) d\mu_K(y)$$

$$\geq \int_{A_{\alpha_k}^{+}(k)} \int_{A_{\alpha_k}^{-}(k)} \underbrace{f(x-y)}_{\geq C|x-y|^q} d\mu_K(x) d\mu_K(y)$$

$$= C |x_{\alpha_k} - y_{\alpha_k}|^q \\ = C (x_{\alpha_k} - y_{\alpha_k})^q = C \left(\frac{2R_K}{n}\right)^q$$

$$\geq C \left(\frac{2R_K}{n}\right)^q \mu_K(A_{\alpha_k}^{+}(k)) \mu_K(A_{\alpha_k}^{-}(k))$$

$$\geq C \left(\frac{2R_K}{n}\right)^q \left(\frac{1}{8n}\right)^2$$

$$\Rightarrow I + o(1) \geq C \left(\frac{2R_K}{n}\right) \left(\frac{1}{8n}\right)^2 \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} \infty \quad \text{⚡}$$

da $I < \infty$. $\Rightarrow$ Fall 2.1 kann nicht eintreten

Fall 2.2 $\mu_K(\partial B_{R_K}(0)) \geq \frac{1}{4}$ für ∞ viele K

Schreibe - wie in Fall 1 -

$$\partial B_{R_K}(0) = \bigcup_{\alpha=1}^n \tilde{A}_{\alpha}^{+}(k) \cup \tilde{A}_{\alpha}^{-}(k)$$

Wobei

$$\tilde{A}_{\alpha}^{+}(k) = \partial B_{R_K}(0) \cap \{ |x_1|, \dots, |x_{\alpha-1}| < \frac{R_K}{n}, x_{\alpha} \geq \frac{R_K}{n} \}$$

$$\tilde{A}_{\alpha}^{-}(k) = \partial B_{R_K}(0) \cap \{ |x_1|, \dots, |x_{\alpha-1}| < \frac{R_K}{n}, x_{\alpha} \leq -\frac{R_K}{n} \}$$

Wiederum gilt $\tilde{A}_2^+(k) = -\tilde{A}_2^-(k)$ und daher

Folgt man wieder mit der Symmetrie der Maße

$$\frac{1}{4} \leq \mu_k(\partial B_{R_k}(0)) = \sum_{\theta=1}^n 2 \mu_k(\tilde{A}_\theta^+(k)).$$

$$\Rightarrow \exists \tilde{\partial}_k \in \{1, \dots, n\} : \mu_k(\tilde{A}_{\tilde{\partial}_k}^+(k)) = \mu_k(\tilde{A}_{\tilde{\partial}_k}^-(k)) \geq \frac{1}{8n}$$

$$\Rightarrow I + o(1) = E(\mu_k) \geq \int_{\tilde{A}_{\tilde{\partial}_k}^+(k)} \int_{\tilde{A}_{\tilde{\partial}_k}^-(k)} \underbrace{f(x-y)}_{\geq c \left(\frac{2R_k}{rn}\right)^q \text{ wie in Fall 2.1}} d\mu_k(x) d\mu_k(y)$$

$$\geq c \left(\frac{2R_k}{rn}\right)^q \mu_k(\tilde{A}_{\tilde{\partial}_k}^+(k)) \mu_k(\tilde{A}_{\tilde{\partial}_k}^-(k))$$

$$= c \left(\frac{2R_k}{rn}\right)^q \left(\frac{1}{8n}\right)^2 \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty)$$

$\Rightarrow$ Fall 2.2 kann nicht eintreten

$\Rightarrow$ Fall 1 (Kompaktheit) tritt ein

$$\Rightarrow \exists (x_k)_{k=1}^\infty : \forall \varepsilon > 0 \exists R > 0 :$$

$$\int_{B_R(x_k)} d\mu_k \geq 1 - \varepsilon \quad \forall k.$$

Bem $(x_k)_{k=1}^\infty$ beschränkt!

$$\text{Bew } \exists R > 0 : \mu_k(B_R(x_k)) \geq \frac{3}{4} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\stackrel{\text{Symmetrie}}{\Rightarrow} \mu_k(-B_R(x_k)) = \mu_k(B_R(-x_k)) \geq \frac{3}{4} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Falls nun eine TF (x_k) gegen ∞ divergiert

so gilt: $\exists k_0 \in \mathbb{N} : |x_k| > 2R \quad \forall k \geq k_0$

Damit ~~B~~ $B_R(x_k) \cap B_R(-x_k) = \emptyset$.

denn gäbe es $z \in B_R(x_k) \cap B_R(-x_k)$ so wäre

$$4R < 2|x_k| = |x_k + x_k| = |x_k - z + z - x_k| \\ \leq |x_k - z| + |-x_k - z| \leq 2R$$

$$\Rightarrow 4R < 2R \quad \nRightarrow \Rightarrow B_R(x_k) \cap B_R(-x_k) = \emptyset$$

$$\Rightarrow 1 \geq \mu_k(B_R(x_k) \cup B_R(-x_k)) = \mu_k(B_R(x_k)) + \mu_k(B_R(-x_k)) \\ \geq \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} \quad \nRightarrow$$

$\Rightarrow \nRightarrow$ zu (x_k) unbeschränkt.

$\Rightarrow (x_k)_{k=1}^{\infty}$ beschränkt und damit gilt A.N.E.T

$$x_k \rightarrow x \text{ für ein } x \in \mathbb{R}^n$$

Setze $\bar{\mu}_k(B) := \mu_k(B - x_k)$

Beh $\bar{\mu}_k \rightarrow \mu$ (NAET) für ein $\mu \in \mathcal{P}_{\text{sym}}(\mathbb{R}^n)$

1) ~~NAET~~ NAET gibt $\bar{\mu}_k \rightarrow \mu$ da $\bar{\mu}_k \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ für ein $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

Beh $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

Wir wissen: $\forall \varepsilon > 0 \exists R > 0$:

$$\int_{B_R(0)} d\bar{\mu}_k = \int_{B_R(x_k)} d\mu_k \geq 1 - \varepsilon$$

Fixiere $\varepsilon > 0$ und wähle R wie oben.

Sei nun $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$: $\varphi|_{B_R(0)} = 1$, $\text{supp}(\varphi) \subset B_{2R}(0)$ und $0 \leq \varphi \leq 1$

$$\Rightarrow \mu(\mathbb{R}^n) \geq \mu(B_{2R}(0)) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu \stackrel{\mu_k \rightarrow \mu}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi d\mu_k$$

$$\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(B_R(0)) \geq 1 - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \mu(\mathbb{R}^n) \geq 1 - \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(\mathbb{R}^n) \geq 1$$

Dass $\mu(\mathbb{R}^n) \leq 1$ folgt daraus dass $\mu \mapsto \mu(\mathbb{R}^n)$

stetig ist.

Noch $\exists w \in \mathbb{R}^n : \mu(B-w) = \mu(-B-w)$.

Es genügt zu zeigen: $\exists w \in \mathbb{R}^n : \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-w) d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-w) d\mu$

Wir wissen 1) $\mu_k(B) = \mu_k(B)$ $\forall k \in \mathbb{N} \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\Rightarrow \bar{\mu}_k(B+x_k) = \bar{\mu}_k(-B+x_k) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z-x_k) d\bar{\mu}_k(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(-z-x_k) d\bar{\mu}_k(z)$$

Sei nun $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ fest

Nun gilt $x_k \rightarrow x \Rightarrow \varphi(\cdot - x_k) \rightarrow \varphi(\cdot - x)$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n$ da φ glm stetig

$$\text{Beh} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z-x_k) d\bar{\mu}_k(z) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z-x) d\mu(z)$$

Bew

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z-x_k) d\bar{\mu}_k(z) - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z-x) d\mu(z) \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(z-x_k) - \varphi(z-x)| d\bar{\mu}_k(z) + \underbrace{\left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z-x) d\bar{\mu}_k(z) - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z-x) d\mu(z) \right|}_{\rightarrow 0 \text{ da } \varphi(\cdot-x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq \underbrace{\sup_{z \in \mathbb{R}^n} |\varphi(z-x_k) - \varphi(z-x)|}_{= o(1)} \underbrace{\bar{\mu}_k(\mathbb{R}^n)}_{= 1} + o(1) \leq o(1)$$

$\Rightarrow$ Beh.

$$\text{Analog: } \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(-z-x_k) d\bar{\mu}_k(z) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(-z-x) d\mu(z)$$

Mit (1) $\Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z-x) d\mu(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(-z-x) d\mu(z)$$

$\Rightarrow$ Wir haben einen Kandidaten μ für einen Minimierer konstruiert. Nach $\Sigma \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ ist schwach- $\ast$ -unterhalbstetig. Dann gilt nämlich

$$I \leq \Sigma(\mu) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \Sigma(\mu_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Sigma(\mu_k(\cdot - x_k))$$

$$\stackrel{\substack{\text{Translation} \\ \text{invariant}}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \Sigma(\mu_k) = I$$

$$\Rightarrow \Sigma(\mu) = I$$

Dass Σ schwach- $\ast$ -unterhalbstetig ist lässt sich zeigen. Allerdings verzichten wir an dieser Stelle darauf (Sorry, ich habe nicht geplant dass es so ausgeht)

Aufgabe 45

Satz von Vitali

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $(f_k)_{k=1}^{\infty} \subset L^1(\Omega)$, $f_k \rightarrow f$ pktw f.ü.

so dass

i) $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ gleichgradig integrierbar d.h.

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall A \subset \Omega$ mit $|A| < \delta$ gilt

$$\int_A |f_k(x)| dx < \varepsilon$$

ii) $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ gleichgradig klein im Unendlichen d.h.

$\forall \varepsilon > 0 \exists M \subset \Omega$ beschränkt sodass $\forall k \quad \int_M |f_k(x)| dx < \varepsilon$.

Dann gilt $f_k \rightarrow f$ in $L^1(\Omega)$ d.h. $\int_{\Omega} |f_k - f| dx \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} 0$.

A45 (a)

Sei $(f_k) \subset L^1(\Omega)$ beschränkt mit

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{\{|f_k| > A\}} |f_k(x)| dx = 0$$

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists A_0 > 0 : \sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{\{|f_k| > A_0\}} |f_k(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}$

Wähle nun $\delta := \frac{\varepsilon}{2A_0}$. Für $A \subset \Omega$ mit $|A| < \delta$

gilt

$$\int_A |f_k(x)| dx \leq \int_{A \cap \{|f_k| \leq A_0\}} |f_k(x)| dx + \int_{\{|f_k| > A_0\}} |f_k(x)| dx$$

$$\leq A_0 |A| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow \text{Beh.}$$

Aufgabe 4.8(b)

Sei nun

$(f_k)_{k=1}^{\infty}$ gleichgradig integrierbar also

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall A \subset \Omega : |A| < \delta$ gilt

$$\int_A |f_k(x)| dx < \varepsilon_0 \quad \forall k$$

Dann

(a) Beh $(f_k)_{k=1}^{\infty} \subset L^1(\Omega)$ beschränkt.

Bew: Wahl $\varepsilon = 1$. $\overline{\Omega}$ wird von endlich vielen Kugeln mit Radius $\frac{1}{n} \left(\frac{\delta}{2} \right)^{\frac{1}{n}}$ überdeckt. Alle diese Kugeln haben Volumen $< \delta$. $\underbrace{B_1, \dots, B_N}_{\text{angenommen}}$ Wir benötigen N Kugeln für die Überdeckung. Dann gilt

$$\int_{\overline{\Omega}} |f_k(x)| dx \leq \sum_{i=1}^N \int_{B_i} |f_k(x)| dx \leq N \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow |\{ |f_k| \geq C \}| \stackrel{\text{Chebyshev}}{\leq} \frac{N}{C} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

(b) ~~Sei~~ Sei $\varepsilon > 0$. $\exists \exists C \in \mathbb{R}_{>0}$:

Wir zeigen $(C \rightarrow \infty)$ $\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{\{|f_k| \geq C\}} |f_k(x)| dx < \varepsilon$

Nähme $C > 0$ so groß dass $\frac{N}{C} < \delta = \delta(\varepsilon)$

Dann gilt $|\{ |f_k| \geq C \}| < \delta \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Wahl von ε

$\Rightarrow$

$$\int_{\{ |f_n| \leq c \}} |f_n(x)| dx < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A45c)

Sei $\varepsilon > 0 \quad \exists \quad \exists \quad k_0 \geq 0 : \int_{\Omega} |f_k - f| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$

Wir wissen (Satz von Egorow) da $|f_k - f| \rightarrow 0$ p.k.w.

$\exists E \subset \Omega$ messbar : $|E| < \delta(\varepsilon_1)$:

$|f_k - f| \rightarrow 0$ gleichmäßig auf $\Omega \setminus E$

$$\Rightarrow \int_{\Omega \setminus E} |f_k - f| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

Zusätzlich wegen Bedingung (i) $\int_E |f_k - f| < \varepsilon_2$

(Beachte: Falls f_k Bedingungen (i) und (ii) von Vitali erfüllt, so tut dies auch $|f_k - f|$.)

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_k - f| dx \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega \setminus E} |f_k - f| + \int_E |f_k - f| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \exists k_0 : \forall k \geq k_0 : \int_{\Omega} |f_k - f| < \varepsilon \Rightarrow \text{Beh.}$$

Aufgabe 40 a

Für $p=1$ gilt der Satz so wie er im Skript steht tatsächlich auch, die schwache Konvergenz in $D^{2,1}$ ist ja bereits vorausgesetzt. In

Beweis gibt es keine technischen Probleme außer:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D^m u_k|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |D^m(u_k - u)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |D^m u|^2 dx + o(1)$$

im schwachen Sinne von Borel-Maß

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi |D^m(u_k - u)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi |D^m u_k|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi |D^m u|^2 dx$$

laut VL

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 \varphi \frac{d}{dt} |D^m(u_k - tu)|^2 dt dx$$

Hätten wir gern

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 \operatorname{sgn}(D^m(u_k - tu)) \cdot (-u) dt dx$$

Problem: gilt die Kettenregel?!? $1 \notin C^1$

→ Glücklicherweise gilt die Kettenregel für 1.1 doch

Da $|f| = f^+ + f^-$ und im Sinne schwacher Ableitungen

gilt: $\nabla f^+ = \nabla f \cdot 1_{f>0}$ (siehe PDF Vorlesung)

$$\nabla f^- = -\nabla f \cdot 1_{f<0}$$

$$\Rightarrow \nabla |f| = \nabla f \operatorname{sgn} f.$$

Aufgabe 46b

$$n > mp$$

$$q = \frac{np}{n-mp}$$

$$v(x) = R^{-n/q} u\left(\frac{x-y}{R}\right)$$

$$\|v\|_q^q \int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|^q dx = \frac{1}{R^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| u\left(\frac{x-y}{R}\right) \right|^q dx$$

$$\underline{z = \frac{x-y}{R}}$$

$$dz = \frac{1}{R^n} dx$$

→ Beh.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(z)|^q dz = \|u\|_q^q$$

$$|D^m v|^p = \left(\sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha v|^2 \right)^{\frac{p}{2}}$$

$$|\alpha|=m \Rightarrow D^\alpha v = R^{-m-\frac{n}{q}} (D^\alpha u)\left(\frac{x-y}{R}\right)$$

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha v|^2 \right)^{\frac{p}{2}} = R^{-pm-\frac{pn}{q}} \left(\sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 \left(\frac{x-y}{R}\right) \right)^{\frac{p}{2}}$$

$$= R^{-pm-\frac{pn}{q}} |D^m u|^p\left(\frac{x-y}{R}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int |D^m v|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} R^{-pm-\frac{pn}{q}} |D^m u|^p\left(\frac{x-y}{R}\right) dx \\ &= R^{n+pm-\frac{pn}{q}} \int |D^m u|^p(z) dz \end{aligned}$$

$$n - pm - \frac{pn}{q} = n - pm - \frac{\frac{np}{n-p}}{n-p} = 0.$$

$$\Rightarrow \int |D^m v|^p dx = \int |D^m u|^p(x) dx$$

$$\Rightarrow \|u\|_{D^{m,p}}^p = \|v\|_{D^{m,p}}^p \rightarrow \text{Beh}$$

(c) (i) Vgl. Lösung von Aufgabe 15

(ii) OBdA $Q_f(\mathbb{R}) \neq 0$. (sonst ist klar dass das Max angenommen wird)
Es sei $(y_m) \subset \mathbb{R}^n$ so dass

$$\int_{B_{\frac{1}{R}}(y_m)} |f(\xi)| d\xi \longrightarrow \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B_{\frac{1}{R}}(y)} |f(\xi)| d\xi$$

Nun ist y_m beschränkt denn falls eine TF y_m gegen unendlich konvergiert so

gilt

$$\chi_{B_{\frac{1}{R}}(y_m)} \longrightarrow 0, \quad \text{pktweise}$$

und daher

$$\|f\|_{\chi_{B_{\frac{1}{R}}(y_m)}} \longrightarrow 0 \quad \text{für}$$

und mit der L^2 -Majorante $|f| \in L^2$.

Durchschnitt
 $\implies$
 Konvergenz

$$\int |f(\xi)| \chi_{B_{\frac{1}{R}}(y_m)}(\xi) d\xi \longrightarrow 0$$

$$\implies \int_{B_{\frac{1}{R}}(y_m)} |f(\xi)| d\xi \longrightarrow 0,$$

A46(c) (iii)

Sei $R_n \rightarrow R \in (0, \infty)$

Beh $Q_f(R_n) \rightarrow Q_f(R) \quad (n \rightarrow \infty)$.

Sei $\varepsilon > 0$.
 $\Rightarrow \exists \delta > 0: (|A| < \delta \Rightarrow \int_A |f| dx < \varepsilon)$

Beachte:

$\forall y \in \mathbb{R}^n$

$$\left| B_{\frac{1}{R_n}}(y) \Delta B_{\frac{1}{R}}(y) \right| \xrightarrow[\text{Lebesguemaßes}]{\text{Translationsinvariant}} \left| B_{\frac{1}{R_n}}(0) \Delta B_{\frac{1}{R}}(0) \right|$$

$\downarrow$
symmetrische
Mengenabgrenzung

$\longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$$n \geq n_0 \Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}^n: \left| B_{\frac{1}{R_n}}(y) \Delta B_{\frac{1}{R}}(y) \right| < \delta$$

Nun sei $n \geq n_0$.

Wähle $\bar{y}_n \in \mathbb{R}^n$: $\int_{B_{\frac{1}{R_n}}(\bar{y}_n)} |f| dx = Q_f(R_n)$

und $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$: $\int_{B_{\frac{1}{R}}(\bar{y})} |f| dx = Q_f(R)$

Dann gilt

$$\begin{aligned} Q_f(R) - Q_f(R_n) &= \int_{B_{\frac{1}{R}}(\bar{y})} |f| dx - \max_{z \in \mathbb{R}^n} \int_{B_{\frac{1}{R_n}}(z)} |f| dx \\ &\leq \int_{B_{\frac{1}{R}}(\bar{y})} |f| dx - \int_{B_{\frac{1}{R_n}}(\bar{y})} |f| dx \end{aligned}$$

$$\leq \int_{B_{\frac{1}{R}}(\bar{y}) \setminus B_{\frac{1}{R_n}}(\bar{y})} |f| dx \leq \int_{B_{\frac{1}{R}}(\bar{y}) \Delta B_{\frac{1}{R_n}}(\bar{y})} |f| dx < \varepsilon$$

$$\text{da } |B_{\frac{1}{R}}(\bar{y}) \Delta B_{\frac{1}{R_n}}(\bar{y})| < \delta.$$

Analog

$$Q_f(R_n) - Q_f(R) = \int_{B_{\frac{1}{R_n}}(\bar{y}_n)} |f| dx - \max_{z \in \mathbb{R}^n} \int_{B_{\frac{1}{R}}(z)} |f| dx$$

$$\leq \int_{B_{\frac{1}{R_n}}(\bar{y}_n)} |f| dx - \int_{B_{\frac{1}{R}}(\bar{y}_n)} |f| dx$$

$$\leq \int_{B_{\frac{1}{R_n}}(\bar{y}_n) \Delta B_{\frac{1}{R}}(\bar{y}_n)} |f| dx < \varepsilon$$

$$\text{da } \forall n \in \mathbb{N} \quad |B_{\frac{1}{R_n}}(\bar{y}_n) \Delta B_{\frac{1}{R}}(\bar{y}_n)| < \delta.$$

(iv)

Zuerst $\lim_{R \rightarrow \infty} Q_f(R) = 0.$

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : |A| < \delta \Rightarrow \int_A |f| dx < \varepsilon.$

~~Nun~~ Nun $|B_{\frac{1}{R}}(0)| \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$

$\Rightarrow \exists R_0 : R > R_0 \Rightarrow |B_{\frac{1}{R}}(0)| < \delta \quad \forall R > R_0.$

Sei nun $R > R_0$

Nun : $\forall y \in \mathbb{R}^n$

$\int_{B_{\frac{1}{R}}(y)} |f| dx < \varepsilon \quad \text{da} \quad |B_{\frac{1}{R}}(y)| = |B_{\frac{1}{R}}(0)| < \delta$

$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} Q_f(R) < \varepsilon. \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} Q_f(R) = 0.$

Nun $\lim_{R \rightarrow \infty} Q_f(R) = \|f\|_{L^2}$

Beachte

$$Q_f(R) \geq \int_{B_R^c(0)} |f| dx$$

und

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B_R^c(0)} |f| dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f| \chi_{B_R^c(0)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f| dx = \|f\|_{L^2}$$

wegen dem Satz über Monotonie Konvergenz

$$\Rightarrow \|f\|_{L^2} \geq \limsup_{R \rightarrow \infty} Q_f(R) \geq \liminf_{R \rightarrow \infty} \int_{B_{\frac{1}{R}}(0)} |f| dx = \|f\|_{L^2}$$

da $Q_f(R) \leq \|f\|_{L^2}$

$\Rightarrow$ Beh.